第 25 卷 第 12 期 1998 年 12 月
中 国 激 光 CHINESE JOURNAL OF LASERS
Vol. A25, No. 12 December, 1998

# 傍轴光束传输的统计行为*

陈惠龙 曹 清 范滇元
(中国科学院上海光机所高功率激光物理国家实验室 上海 201800)

**提要** 对一个任意的傍轴光束,只要给定了任一起始截面上的光场分布情况,则其在自由空间中传输的统计行为就可完全确定了,而且可用"等效高斯光束"来进行描述。给出了相应的传输参数,它们完全确定于起始截面的光场分布情况。利用"嵌入高斯光束"的概念将文献[5]中的结果推广到更为普遍的情形。

**关键词** 光束传输,等效高斯光束,传输参数

## 1 引 言

对于一个在自由空间中传输的任意傍轴光束,在给定了其起始截面的光场振幅及波面分布后,要知道其每条衍射光线的轨迹是不容易的;然而就传输而言,人们关心的往往不是激光束精确的局部细节问题,而是光束整体的统计行为。这里的"统计行为"并不是指光束传输过程中的环境因素、振幅及位相等的随机涨落而引起的行为,而是指光束传输过程中非细节性的整体的平均行为,如光束的质量因子、光束的光斑半径(束宽)及等效波面曲率半径的传输变化等。如何描述任意傍轴光束传输的统计行为呢?近年来,在这个问题的研究上已有了很大的进展[1~6]。Siegman[1]利用二阶矩方法讨论了傍轴标量光束的传输问题,并引入了表征激光束光束质量的 $M^2$ 因子,通过光束在三个不同截面位置上的束宽测量,则可确定光束的质量因子、光 腰及光腰位置;此前,在给定一个截面的光场分布后,邓锡铭等[2]找到了将傍轴光束等价于高斯光束的广义 $ABCD$ 定律,但这一给定的起始截面必须是在激光束的准远场区;Belanger[3],Siegman[4]分别定义了光束的等效波面曲率半径,由此 Belanger[3]得到了与[2]中同样的广义 $ABCD$ 定律,但要通过 $ABCD$ 定律才能得到光束的光腰位置及光腰半径,而且他们对等效波面曲率半径的物理意义的解释是不明确的;邓锡铭等[5]及曹清等[6]则对等效波面曲率半径的由来及其物理意义作了详细的解释,进而邓锡铭等[5]利用厄米-高斯展开方法及 Fock 态表像的方法,建立了任意傍轴光束传输的统计方程组,由此得到了等效高斯光束的传输参数,但其方法较复杂,而且结果只限于横向为一维情况的傍轴光束。本文则从横向二维情况下傍轴光束传输的统计行为出发,利用"嵌入高斯光束"等概念对等效高斯光束的参数及文献[5]中的结果作了进一步的讨论,光束的起始截面可在任一传输位置。在此,考虑的是自由空间中传输的单色、标量傍轴光束。

* 国家自然科学基金重点项目资金资助项目。

收稿日期: 1998-05-14; 收到修改稿日期: 1998-06-12

# 2 傍轴光束传输的统计行为

## 2.1 基本定义

任一傍轴光束, 在横截面 $z$ 处, 其归一化光场可表示为

$$\Phi = \Phi_0 \exp(ikL) \qquad \iint \Phi\Phi^* \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 \tag{1}$$

其中 $\Phi_0$ 为振幅, $L$ 为准程函; $k = 2\pi/\lambda$, $\lambda$ 为波长; 积分限为$(-\infty, +\infty)$, 以下的积分均以此为限。邓锡铭等在 1983 年[7] 就找到了傍轴光束径向能量的一个不变积分, 即在任何一个光束横截面上,

$$E_{\perp} = \sum_i E_{\perp i} = E_{\perp x} + E_{\perp y} \tag{2a}$$

$$E_{\perp x} = \frac{1}{k^2}\iint \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad E_{\perp y} = \frac{1}{k^2}\iint \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{2b}$$

是一个不变量, 即积分值$E_{\perp}$, $E_{\perp i}$ 是不随光束传输截面位置$z$ 变化的守恒量( 文献[8] 对这一问题有更深入的讨论) 。其中 $i = x, y$ 分别代表$x$, $y$ 方向的分量。下面将看到, 不变积分这一光束本身所固有的特征量的引入对光束统计行为的确定将起到重要的作用。光束的强度二阶矩很好地表示了束宽这一光束的统计特征量, 如果我们在这里将光束的传输轴 $z$ 选择在光束的"重心”传输线上, 从而使得光束的一阶矩均为零, 于是二阶矩的传输规律就等同于光束的标准方差 $\sigma$ 的传输规律( 这样做并不会影响我们下面的讨论结果) . 于是有

$$\sigma_x^2 = \iint x^2 \Phi_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \sigma_y^2 = \iint y^2 \Phi_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

则光束的束宽定义为

$$w_i^2 = 4\sigma_i^2 \tag{4}$$

若设 $\Psi(f_x, f_y)$ 为 $\Phi_0(x, y)$ 的傅里叶变换式, 则可定义

$$\overline{f_i^2} = \iint f_i^2 |\Psi(f_x, f_y)|^2 \mathrm{d}f_x \mathrm{d}f_y$$

那么光束质量因子 $M_i^2$ 就定义为[1]

$$M_i^2 = 4\pi \sqrt{\sigma_{0i}^2 \overline{f_i^2}} \tag{5}$$

其中 $2\sigma_{0i}$ 即为光腰$z_{0i}$ 处的光斑半径。一个横向为二维的任意傍轴光束, 其波面并不是个精确的椭球面( 或球面) , 然而我们可定义一平均波球面来描述其整体行为, 当然要使其球表面最大限度地接近真实波面, 也就是说应使实际波面与平均波面所代表的光束之间的波像差为最小。由这一思想出发, 可以求得椭球面在 $x$, $y$ 方向的平均波面曲率半径分别为[6]

$$R_x = \frac{\sigma_x^2}{\iint x(\nabla_x L)\Phi_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \qquad R_y = \frac{\sigma_y^2}{\iint y(\nabla_y L)\Phi_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \tag{6}$$

这一结果与文献[3] 和[4] 中所定义的等效波面曲率半径是完全一样的。

## 2.2 参数间的关系

利用傅里叶方法可以证明[1], 一个傍轴光束标准方差的传输规律为

$$\sigma_{iz}^2 = \sigma_{i0}^2 + \lambda^2 \overline{f_i^2}(z - z_{i0})^2$$

利用光束质量 $M^2$ 因子的定义, 则可进一步将上式写为

$$\sigma_{iz}^2 = \sigma_{i0}^2\left[1 + \left|\frac{z - z_{i0}}{Z_{Ri}}\right|^2\right] \tag{7}$$

其中 $Z_{Ri}$ 为光束的瑞利长度, 即

$$Z_{Ri} = \frac{4\pi\sigma_{i0}^2}{M_i^2\lambda} \tag{8}$$

由文献[3]可知

$$\iint x(\nabla_x L)\Phi_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_x^2}{\partial z}$$

将之代入(6)式并利用式(7)可得

$$R_i = 2\sigma_i^2\left(\frac{\partial\sigma_i^2}{\partial z}\right)^{-1} = \frac{(z - z_{0i})^2 + Z_{Ri}^2}{z - z_{0i}} \tag{9}$$

另外, 傍轴光束的质量因子与光束截面的光场分布之间的关系为[3]

$$\frac{4}{k^2}M_x^4 = \frac{16}{k^2}\sigma_x^2\iint\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \left[4\iint x(\nabla_x L)\Phi_0^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]^2$$

引入不变积分(2)式及平均波面曲率半径(6)式, 可由上式求出光束质量因子为

$$M_x^2 = 2k\sigma_x\sqrt{E_{\perp x} - \frac{\sigma_x^2}{R_x^2}} \tag{10a}$$

同样对 $M_y^2$, 有

$$M_y^2 = 2k\sigma_y\sqrt{E_{\perp y} - \frac{\sigma_y^2}{R_y^2}} \tag{10b}$$

### 2.3 统计行为

至此可以知道, 给出了一个傍轴光束起始截面 $z$ 处的振幅和位相分布后, 可直接求得光束的二阶矩 $\sigma_i^2$(式(3)), 不变积分 $E_{\perp i}$(式(2)) 及平均波面曲率半径 $R_i$(式(6)), 进而可得到光束的质量因子 $M_i^2$。然而要了解一个傍轴光束传输的统计行为, 还需知道光束的束腰大小 $w_{0i}^2$(或 $\sigma_{0i}^2$) 及光腰到起始截面的距离 $z - z_{0i}$(即光腰位置)。联立关系式(7) 及(9), 再利用(8), (10) 及(4) 式即可解得

$$w_{0i}^2 = 4\sigma_i^2\left(1 - \frac{\sigma_i^2}{R_i^2E_{\perp i}}\right) \tag{11}$$

$$z - z_{0i} = \frac{\sigma_i^2}{R_iE_{\perp i}} \tag{12}$$

上面两式再加上(4), (10) 式, 完全确定了一个傍轴光束传输的统计行为的特征参数, 即光束的光斑、光腰及质量因子等有关参数; 而(7), (9) 式则描述了光束束宽及平均波面曲率半径的统计传输行为。只要给定了起始截面的光场分布, 光束有关的参数及传输的统计行为也就唯一确定了, 而此起始横截面可在任一位置 $z$ 处。

## 3 等效高斯光束

(7) 与(9) 式表明, 傍轴光束的标准方差 $\sigma_i^2$(或光斑半径 $w_i^2$) 及平均波面曲率半径 $R_i^2$ 在自由空间中的传输规律与理想高斯光束是完全一样的, 这是可将傍轴光束传输的统计行为等效为一个高斯光束的最重要的理由。而且等效高斯光束的参数可由(4), (10), (11), (12) 等式而完全确定; 另外, 在横向为二维的情况下, 由于 $x$, $y$ 方向的非对称性, 故一般情况下此等效高斯光束是像散型的。

与理想高斯光束一样,可将等效高斯光束的阶数定义为

$$\bar{m}_i = \frac{M_i^2 - 1}{2} \tag{13}$$

显然这里的阶数$\bar{m}_i$已不是整数形式。作为一个检验,可任取一个精确高阶高斯分布的光束来进行计算。一个一维的光腰位置在$z = 0$处且光腰大小为$w_0$的$p$阶($p$为整数)高斯光束,它的各个参数可由第2节分析的结果分别计算得

由(3)式可得二阶矩 $\sigma^2 = \frac{2p+1}{4}\left(w_0^2 + \frac{4z^2}{k^2 w_0^2}\right)$

由(6)式可得平均波面曲率半径 $R = \frac{k^2 w_0^4 + 4z^2}{4z}$

由(2)式可得不变积分 $E_\perp = (2p+1)\frac{1}{k^2 w_0^2}$

再将上面几式代入(10)式可得光束质量因子 $M^2 = 2p + 1$

则由(13)式可知其相应的阶数为 $\bar{m} = p$

显然,上述结果正是我们所期望得到的。当然,对于一个光腰不在$z = 0$处的二维的高阶高斯光束,也会得到类似的正确结果。至于一个广义的非整数阶的"高斯光束"在数学上应如何对其进行描述以及在物理上它又该是怎样的一种存在形式,则有待于更进一步的讨论。

邓锡铭等[5]利用复杂的厄米-高斯展开方法及Fock态表像方法给出了一组基模形式的等效高斯光束的参数。若利用"嵌入高斯光束"[1]的概念,[5]中的结果可由(4),(10)及(11)等式方便地导出。一个光斑半径为$w_i^2$,光腰半径为$w_{0i}^2$的$\bar{m}_i$阶的"高斯光束",与其对应的基模高斯光束相应的参数可表示为

$$w_i^2(0) = \frac{w_i^2}{M_i^2} = \frac{2R_i\sigma_i}{k\sqrt{R_i^2 E_{\perp i} - \sigma_i^2}} \tag{14}$$

$$w_{0i}^2(0) = \frac{w_{0i}^2}{M_i^2} = \frac{2\sigma_i}{k}\sqrt{\frac{1}{E_{\perp i}} - \frac{\sigma_i^2}{R_i^2 E_{\perp i}^2}} \tag{15}$$

这就是[5]中所选取的那个特定的展开基的光斑半径及光腰半径。

## 4 结 论

在横向为二维的情况下,一个任意的傍轴光束,只要给定一个起始截面$z$处的光场分布情况(振幅和位相),则其统计的传输行为就完全确定了,而且可用一非整数阶的、像散型的"等效高斯光束"来进行描述,这一广义"高斯光束"参数完全确定于光束起始截面的光场分布并可分别由方程(4),(10),(11),(12)式给出。利用"嵌入高斯光束"的概念,文献[5]中给出的参数可由本文的结果方便地导出,避免了厄米-高斯展开中的复杂的讨论过程。

统计方程的建立,可能为光束质量因子的测量提供一种直接的方法(式(10);而且也使得对光束传输过程中几何和衍射所造成的不同效应的区分成为可能,进而可提供两类不同性质的光束质量评价因子[9]。

## 参 考 文 献

1 A. E. Siegman. New developments in laser resonators. *Proc. SPIE*, 1990, **1224**: 2~14

2 Deng Ximing, Ding Liming, Ye Chenchun. Generalization of *ABCD* law. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1990, **17**(5): 257~ 264 (in Chinese)

3 P. A. Belanger. Beam propagation and the *ABCD* ray matrices. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(4): 196~ 198

4 A. E. Siegman. Defining the effective radius of curvature for a nonideal optical beam. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1991, **27**(5): 1146~ 1148

5 Deng Ximing, Guo Hong, Cao Qing. The invariable integral and the statistical behaviors of paraxial beams propgating in free space. *Science in China* (中国科学), 1997, **27**(1): 64~ 71 (in Chinese)

6 Cao Qing, Deng Ximing. A new method for interpreting the effective radius of curvature: two-dimensional case. *Chin. Phys. Lett.*, 1997, **14**(6): 421~ 423

7 Deng Ximing, Chen Zhezun. On the invariable property of internal energy of paraxial beam cross-section. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1983, **3**(5): 385~ 390 (in Chinese)

8 Cao Qing, Guo Hong, Deng Ximing. Energy conservation of beam cross-section and energy diffraction divergence. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1996, **16**(4): 389~ 393 (in Chinese)

9 Deng Ximing, Guo Hong, Cao Qing. Paraxial riemannian geometrical optics 一. Two kinds of beams quality factors. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1996, **A23**(8): 727~ 731 (in Chinese)

# Statistical Propagation Behaviors of Paraxial Beams

Chen Huilong  Cao Qing  Fan Dianyuan

(*National Laboratory on High Power Laser and Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

**Abstract** In this paper, the statistical behabiors are analysed for an arbitrary paraxial beam with two-dimentional distribution in the transverse section, and the propagation parameters are obtained for the equivalent Gaussian beam which can describe the statistical behaviors of the paraxial beam. The results in reference [5] can be derived from the conclusions in this paper by using the concept of "embedded Gaussian beam". This results can be used in the geometrical description for the propagation of a paraxial beam.

**Key words** beam propagation, statistical behaviors, efficient Gaussian beam