

# 单端输入非线性波导耦合器的稳定性 及其自开关效应\*

李 力

(上海大学嘉定校区信息学院 上海 201800)

王又法

(上海海运学院电子工程系 上海 200135)

**提要** 分析了单端输入非线性光波导耦合器的稳定性,给出了非线性耦合波方程的近似解析解,用近似解析解计算的结果与严格解的结果以及 A. T. Pham 等的近似结果进行了比较,数值分析表明本文的结果比 A. T. Pham 等的结果更接近严格解,还分析了非线性光波导耦合器的调制特性和自开关效应。

**关键词** 非线性耦合,光波导,光开关

## 1 引 言

自 1980 年 S. M. Jensen 首次描述了非线性光波导耦合器的耦合特性<sup>[1]</sup>,并给出了其严格解<sup>[2]</sup>以来,非线性耦合器的耦合特性的研究引起了国内外学者的极大兴趣。A. T. Pham 等详细分析了总的输入功率处于临界功率附近时非线性耦合波方程的近似解,在此基础上详细讨论了非线性耦合器的调制特性<sup>[3,4]</sup>。由文献[3]的(41)式可知当总的输入功率小于临界功率时,即  $P_i < P_c$  时单端输入非线性耦合波方程之解可表示为

$$P_1(L) = \frac{P_i}{2} [1 - \text{cn}(2CL - 2K_1 | k_1)] \quad (1)$$

式中  $K_1$  为完全椭圆积分,  $k_1$  为椭圆函数的模。

根据椭圆函数的定义有恒等式<sup>[5]</sup>

$$\text{cn}(2CL - 2K_1 | k_1) = - \text{cn}(2CL | k_1) \quad (2)$$

文献[3]并没使用上述恒等式,而是直接积分求出了  $K_1$  的近似值,即

$$K_1 \approx \ln \sqrt{\frac{8P_c}{P_c - P_i}} \quad (3)$$

运用(3)式和  $\text{cn}(u | k_1) \approx \text{sech}(u)$  (这里满足  $k_1 \approx 1$ ), A. T. Pham 等得到了文献[3]中的近似式(42)式。既然(2)式是精确的,应用恒等式(2)和近似式  $\text{cn}(u | k_1) \approx \text{sech}(u)$ , 应该得到更准确的解,即  $P_1(L) \approx \frac{P_i}{2} [1 + \text{sech}(2CL)]$ 。尽管当  $k_1 \rightarrow 1$  时  $\text{cn}(u | k_1) = \text{sech}(u)$ , 然而数值分析表明当  $k_1 = 0.999$  时椭圆函数  $\text{cn}(u | k_1)$  的周期仅约为 18, 因而只有当  $k_1$  足够接近 1 时

\* 上海市教委青年科学基金资助项目。

即输入功率足够接近临界功率时,此近似式的近似程度才好。

通过上述分析可见,在单输入的情况下,当输入功率接近临界功率时,A. T. Pham 的近似方法很粗糙,同时通过数值分析,还发现当耦合长度较小时,其数值解与严格解有很大误差。为此,对单输入非线性耦合器的调制特性进行了探讨并从理论上指出为了得到好的自开关特性和调制特性,总输入功率必须处于临界功率附近。

## 2 理论分析

假设非线性耦合器由两根完全一样的单模无耗波导构成,光波导 1 和 2 中的光功率分别为  $P_1$  和  $P_2$ ,总功率为  $P_t$ 。由文献[2]可知光功率  $P_1$  随传播距离  $z$  的演变规律为

$$\left[ \frac{dP_1}{dz} \right]^2 = - \left[ \frac{4C}{P_c} \right]^2 P_1(P_t - P_1) \left[ \left[ \frac{P_c}{2} \right]^2 - P_1(P_t - P_1) \right] \quad (4)$$

其中,  $C$  为线性耦合系数,  $P_c$  为临界功率,  $P_c = \frac{4C}{Q_3 - 2Q_4}$ ,  $Q_3$  为非线性自耦合系数,  $Q_4$  为非线性互耦合系数。

显然方程(4)有解的条件是:当  $P_t \leq P_c$  时,  $P_1$  为任意实数;而当  $P_t \geq P_c$  时,  $P_1$  应满足如下不等式

$$P_1 \geq \frac{P_t + \sqrt{P_t^2 - P_c^2}}{2} \quad (5)$$

从不等式(5)可知,当  $P_t \geq P_c$  时,耦合器不可能达到完全的交叉状态,而且,当  $P_t \gg P_c$  时,无论耦合长度多长,耦合器始终处于直通状态,因而当  $P_t \geq P_c$  时非线性耦合器具有饱和特性。

运用分离变量法求解方程(4),当  $P_1(0) = P_t$  时,可得<sup>[5]</sup>

$$P_1 = \begin{cases} \frac{P_t}{2} [1 + \text{cn}(2Cz|m)] & m = \frac{P_t}{P_c} & P_t < P_c \\ \frac{P_t}{2} [1 + \text{sech}(2Cz)] & & P_t = P_c \\ \frac{P_t}{2} [1 + \text{dn}(2Cz/m_1|m_1)] & m_1 = \frac{P_c}{P_t} & P_t > P_c \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\text{cn}(x|m)$  和  $\text{dn}(x|m_1)$  分别为 Jacobi 椭圆余弦函数和第三类 Jacobi 椭圆函数,它们是双

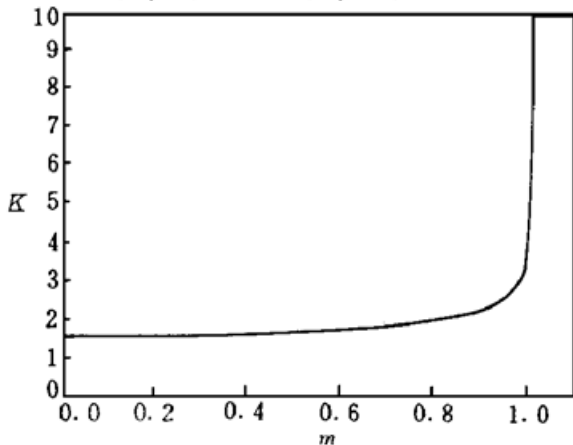


图 1  $K(m)$  与模数  $m$  的关系  
Fig. 1  $K(m)$  as a function of  $m$

周期函数,其实周期分别为  $4K(m)$  和  $2K(m_1)$ ,它们是功率的函数,这表明耦合器的输出不仅依赖于耦合长度还依赖于输入功率。 $m$  和  $m_1$  分别为  $\text{cn}(x|m)$  和  $\text{dn}(x|m_1)$  的模数,且  $0 < m < 1, 0 < m_1 < 1$ 。 $K(m)$  是完全椭圆积分,按照椭圆函数的定义有

$$K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}} \quad (7)$$

椭圆函数的周期是模数的函数,了解椭圆函数的周期随模数变化的规律,对椭圆函数进行近似分析以及对非线性耦合器的耦合特性定性分析都是很重要的。对于具有同样模数的正弦、余弦椭圆函数和

第三阶 Jacobi 椭圆函数的周期分别为  $4K(m)$  和  $2K(m)$ ,  $K(m)$  是一阶完全椭圆积分,  $K(m)$  随模数变化的规律如图 1 所示。

显然, 当椭圆函数的模数接近 1 时, 模数的微小变化将导致椭圆函数周期显著的变化, 从而导致耦合器输出功率的显著变化, 因此, 当单输入非线性耦合器的输入功率接近临界功率时 (即当椭圆函数的模数接近 1 时) 耦合器之输出具有不稳定性, 也就是说, 当单输入非线性耦合器的输入功率接近临界功率时 (即当椭圆函数的模数接近 1 时), 输出耦合器的不稳定性实现自开关或调制功能。

由椭圆函数的定义有, 当  $m$  足够地趋近 1 时,  $\text{cn}(x) \rightarrow \text{sech}(x)$ ; 当  $m_1$  足够地趋近 1 时,  $\text{dn}(x) \rightarrow \text{sech}(x)$ , 因而由(6) 式可知  $P_1(z, P_i)$  是连续函数。

### 2.1 近似分析

既然只有当单输入非线性耦合器的输入功率接近临界功率时 (即当椭圆函数的模数接近 1 时), 非线性耦合器才具有较好的自开关或调制特性, 因而, 研究输入功率接近临界功率时耦合波方程的近似解析解具有重要的实际意义。显然, 当单输入非线性耦合器的输入功率接近临界功率时 (即当椭圆函数的模数接近 1 时), 根据(6) 式按照 A. T. Pham 等的方法<sup>[3]</sup>, 不可能得到文献[3] 所给的近似解。为得到当  $P_i \approx P_c$  时的近似解析解, 由方程(4) 经过适当的变换, 当  $P_i < P_c$  时, 可得

$$\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}} = 2Cz \tag{8}$$

其中  $a = \sqrt{1 - \left[ \frac{2P_1 - P_i}{P_i} \right]^2}$ 。

方程(8) 积分的结果是 Jacobi 椭圆正弦函数, 它是一种双周期函数, 其实周期  $4K$  是椭圆函数的模  $m$  的函数, 且只有当  $m$  足够接近 1 时, 椭圆函数的周期才趋于无穷大, 因而, 只有当  $m$  足够接近 1 且椭圆正弦函数的实周期  $4K$  远远大于函数变量  $2CL$  时, 方程(8) 的近似解方可用非周期函数  $\tanh(x)$  表示。从图 1 可以看出, 即使当  $m$  为 0.999 时完全椭圆积分也仅约等于 4.6, 因而, 不能象文献[3] 那样简单地运用周期为无穷大的非周期函数  $\text{sech}(x)$  替代周期性的椭圆函数。

当  $m \rightarrow 1$  时, 方程(8) 可近似为如下可积的形式

$$\int_0^a \frac{dy}{(1+y)\sqrt{(1-y)(1-my)}} = 2Cz \tag{9}$$

方程(9) 积分可得,

$$a = \frac{1-b}{1-mb} \tag{10}$$

$$b = \frac{2}{m+1} \left[ \frac{1 - \exp[(2Cz - K) \frac{\sqrt{2(m+1)}}{\sqrt{2(m+1)}}]}{1 + \exp[(2Cz - K) \frac{\sqrt{2(m+1)}}{\sqrt{2(m+1)}}]} \right]^2 \tag{11}$$

其中,  $4K$  是椭圆函数的周期。

当  $m \rightarrow 1$  时, 方程(7) 可近似为

$$K \approx \frac{1}{\sqrt{2(1+m)}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{m+1}}{\sqrt{2} - \sqrt{m+1}} \tag{12}$$

因而, 由(9) 和(10) 式可知, 当  $m \rightarrow 1$  时, 方程(4) 的近似解为

$$P_1 = \frac{P_t}{2} \left[ 1 + \frac{4 \sqrt{1 - m^2} \exp(u/2) [1 - \exp(u)]}{(m + 1) [1 + \exp(u)]^2 - 2m [1 - \exp(u)]^2} \right] \quad (13)$$

其中,  $u = \sqrt{2(m + 1)(2Cz - K)}$ 。

当  $m = 1$  时, 式(13) 即可简化为

$$P_1 = \frac{P_t}{2} [1 + \operatorname{sech}(2Cz)] \quad (14)$$

显然, (14) 式是  $m = 1$  时方程(4) 的解, 而从 A. T. Pham 等的近似解<sup>[3]</sup> 得不到式(14)。

当  $P_t > P_c$  时, 按照同样的方法可得到方程(4) 的近似解

$$P_1 = \frac{P_t}{2} \left[ 1 + \frac{4 \sqrt{1 - m_1^2} \exp(v/2) [1 + \exp(v)]}{2[1 + \exp(v)]^2 - (m_1 + 1)[1 - \exp(v)]^2} \right] \quad (15)$$

其中,  $v = \sqrt{2(m_1 + 1)(2Cz/m_1 - K_1)}$

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2(m_1 + 1)}} \ln \frac{\sqrt{m_1 + 1} + \sqrt{2m_1}}{\sqrt{m_1 + 1} - \sqrt{2m_1}} \quad (16)$$

近似解(13) 和(15) 适用的条件分别是  $2Cz \leq K(m)$  和  $2Cz/m_1 \leq K(m_1)$ 。值得注意的是, 只要  $m$  和  $m_1$  足够接近 1, 上述条件总能满足。

### 2.2 调制和自开关特性

为了得到好的自开关或调制特性, 工作点应选择在临界功率点附近, 设波导 1 的初始输入功率为

$$P_1 = P_b \pm \Delta P \quad (17)$$

其中,  $\Delta P$  为控制光功率或调制波功率或耦合器输入功率的波动,  $P_b$  为强光功率或被调制光波的功率, 且满足  $\Delta P \ll P_b$ 。

当  $P_1 < P_c$  时,  $m = (P_b \pm \Delta P)/P_c$ 。当  $P_1 > P_c$  时,  $m_1 = P_c/(P_b \pm \Delta P)$ 。

这样根据式(13), (15) 和(16) 便可讨论非线性耦合器的调制特性或自开关特性。值得说明的是为了得到饱和特性, 总输入功率必须大于临界功率。如果不需要饱和特性, 可通过增加耦

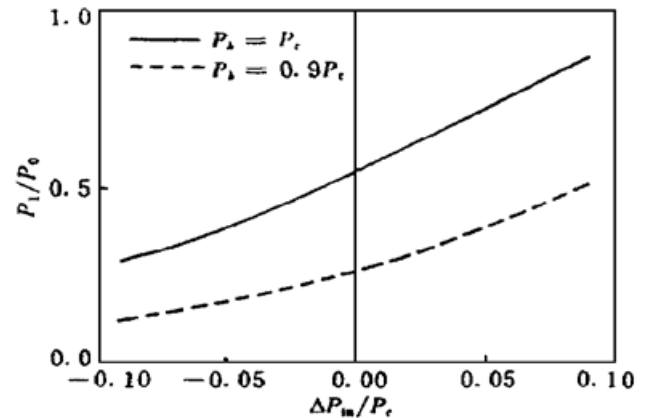
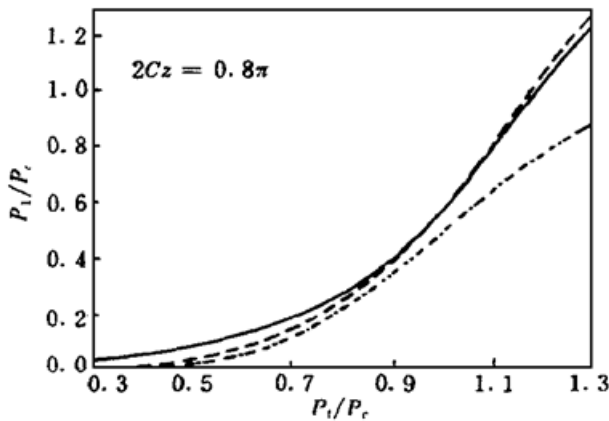


图 2 给定长度的非线性耦合器中归一化输入功率与归一化输出功率的关系

图 3  $|\Delta P_m| = \Delta P$  时非线性耦合器的自相关特性

Fig. 2 Normalized output as a function of the normalized input power for a nonlinear coupler with fixed length

Fig. 3 Self-switching characteristics for nonlinear couplers, where  $|\Delta P_m| = \Delta P$

合长度,降低输入光功率。

图 2 给出了归一化输入功率与归一化输出功率的关系,图中实线是严格解,虚线是近似解,虚点线是 A. T. Pham 的近似解的结果。

从图 2 可知,我们的近似解比 A. T. Pham 的近似解更接近严格解。从图 2 还可看出,当总功率偏离临界功率较大时,近似解与严格解发生较大偏差,这是因为近似解是在总功率接近临界功率的条件下得到的。

非线性耦合器自开关或强度调制特性如图 3 所示。从图 3 可见:(1) 波导 1 的输出功率随输入功率的增大而增大,同时,波导 2 的输出功率随输入功率的增大而减小。如果选取  $P_i = P_c$  为静态工作点,从图 3 可见  $P_i$  的微小变化将导致  $P_1(L)$  显著的变化。当  $P_i$  的微小变化是由控制光功率引起时,可以实现弱光对强光的调制;当  $P_i$  的微小变化是由输入光功率自身的起伏引起时,便可以实现自调制即自开关效应;(2) 只有当总输入功率接近临界功率时,耦合器输入-输出特征曲线才具有较好的自开关特性和调制特性。

### 参 考 文 献

- 1 S. M. Jensen. The non-linear coherent coupler: a new optical logic device, Conf. Integrated and Guided-wave Optics, Incline Village CA, 1980. 105
- 2 S. M. Jensen. The nonlinear coherent coupler. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1981, **QE-18**(10): 1580~1583
- 3 A. T. Pham, L. N. Binh. Nonlinear optical directional coupler-two input operation. *Int. J. Optoelectron.*, 1990, **5**(4): 367~ 380
- 4 A. T. Pham, L. N. Binh. All-optical modulation and switching using a nonlinear-optical directional coupler. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1991, **8**(9): 1914~ 1931
- 5 Liu Shishi, Liu Shida. Special Functions. Beijing: Meteorological Publishing House, 1988, Chap 11 (in Chinese)

## Instabilities and Self-switching in a Nonlinear Directional Coupler

Li Li

(College of Information, Shanghai University, Jiading Campus, Shanghai 201800)

Wang Youfa

(Department of Electronic Engineering, Shanghai Maritime University, Shanghai 200135)

**Abstract** Instabilities and self-switching in a nonlinear directional coupler with single-input excitation are discussed. The approximate analytical solutions to the nonlinear coupling equation near the critical power are obtained.

**Key words** nonlinear coupling, optical waveguide, optical switching