纵向场能量与光束的傍轴标量近似判据*

陈惠龙　曹　清　范滇元

(中国科学院上海光机所高功率激光物理国家实验室　上海 201800)

提要　对于一个傍轴标量光场 $\vec{\epsilon} = [\epsilon_x, 0, 0]$, 考虑其一阶纵向场修正项的影响时, 光场的纵向场能量 E_z 是一个不随光束截面位置 z 变化的守恒量, 其值完全决定于傍轴场(ϵ_x) 的分布情况。纵向场能量 E_z 的大小反映了光束的傍轴标量近似程度, 定义一个近似因子 η 用来作为衡量光束的这一特征的量化判据; 其值越小, 近似程度就越好。以超高斯光束为例, 讨论了其一阶纵向场能量及傍轴标量近似等问题。

关键词　傍轴标量近似, 纵向场能量, 近似因子

1　引　言

在对光束的传输问题的研究、特别是超高斯光束的传输研究中, 人们习惯的作法是将光场假设为标量形式[1~5]; 标量场理论假设光场 $\vec{\epsilon}$(或 $\vec{H}$) 只包含有一个直角坐标分量, 而其他的两个分量均为零, 即将光场写为如下的形式

$$\vec{\epsilon} = [\epsilon_x, 0, 0] \tag{1}$$

然而, M. Lax 等指出[6], 这种在 x 方向上的线偏振光场并不是麦克斯韦方程的严格解, 而只是其零阶近似解, 即傍轴近似解; 而且指出其一阶修正项是一个纵向场分量。L. W. Davis 则利用更为简洁的展开方法得到了与 M. Lax 等相同的结果[7]。此后的一些工作[8~11]也对光束的傍轴近似作了修正, 将光束传输的研究推广到非傍轴情况。

通常由于光束的光腰半径 σ_0 远大于波长 λ, 因而在描述光束的传输行为(特别是近轴行为) 时, 傍轴近似解就可给出相当精确的结果。但在某些特殊情况下(如光束聚焦时), 就有必要考虑光场的高阶修正项的作用了。而在所有的修正项中, 最重要的则是一阶修正项的影响。若在傍轴标量场的基础上, 再考虑其一阶修正场的影响, 而忽略掉其他更高阶的修正项, 则光场就只包含有两项: 即横向场分量 ϵ_x 及纵向场分量 ϵ_z; 于是可将光场写为

$$\vec{\epsilon} = [\epsilon_x, 0, \epsilon_z] \tag{2}$$

当然这里的横向场 ϵ_x 满足傍轴标量方程。

比较(1) 和(2) 式可以看出, 若一阶修正项 ϵ_z 与 ϵ_x 相比是可以忽略的, 则光束的傍轴标量近 似是合适的; 否则, 光场就不再是傍轴标量的形式, ϵ_z 的大小就反映了光场对傍轴标量近似的偏离程度。对于一个形如(2) 式的光场, 本文证明了其一阶纵向场能量 E_z 是一个不随光束截

* 国家自然科学基金重点项目基金资助项目。

收稿日期： 1998-04-24; 收到修改稿日期： 1998-07-02

面位置 z 变化的守恒量, 在此基础上, 提出了一个近似判据 η, 用于比较光束的傍轴标量近似程度。并以超高斯光束为例讨论了其纵向场能量及傍轴标量近似等问题。

2 纵向场能量与傍轴标量近似因子

一个傍轴标量光场 ϵ_x 可表示为如下形式

$$\epsilon_x = \phi_0(x, y, z)\exp(ikL) \tag{3}$$

其中 ϕ_0, L 分别为光场的振幅与准程函数; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$。为讨论方便, 不妨假设横向场 ϵ_x 满足能量归一化条件, 即 $E_x = \iint \epsilon_x \epsilon_x^* \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$。以下若无特别说明, 本文公式的积分限均为$(-\infty, +\infty)$。另一方面, 由文献[6] 可知, 利用零阶横向场可将一阶纵向场分量表示为

$$\epsilon_z = \frac{i}{k}\frac{\partial\epsilon_x}{\partial x} \tag{4}$$

于是可得到纵向场能量与横向场的关系为

$$E_z = \iint \epsilon_z\epsilon_z^* \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial\epsilon_x}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{k^2}\iint\left|\frac{\partial\phi_0}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\left|\frac{\partial L}{\partial x}\right|^2\phi_0^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5}$$

利用傅里叶分析方法可以证明(5) 式是一个与光束截面位置 z 无关的守恒量。在截面 z 处, 对 ϵ_x 作傅里叶变换, 并用记号 F 表示为 $F[\epsilon_x] = \Psi_z(f_x, f_y)$, 则

$$F\left[\frac{\partial\epsilon_x}{\partial x}\right] = i2\pi f_x F[\epsilon_x] = i2\pi f_x \Psi_z(f_x, f_y) \tag{6}$$

对上式利用傅里叶分析中的帕舍伐尔恒等式, 则有

$$\iint\left|\frac{\partial\epsilon_x}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\pi^2\iint f_x^2|\Psi(f_x, f_y)|^2\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{7}$$

另外, 两个相距为 z 的光束截面, 其空间频谱函数 $\Psi_z(f_x, f_y)$ 与 $\Psi_0(f_x, f_y)$ 的关系为(其中 $\Psi_0(f_x, f_y)$ 为 ϵ_x 在 $z = 0$ 处的傅里叶变换)

$$\Psi_z(f_x, f_y) = \Psi_0(f_x, f_y)\exp\left[ikz\sqrt{1 - \lambda^2(f_x^2 + f_y^2)}\right] \tag{8}$$

因而

$$|\Psi_z(f_x, f_y)|^2 = |\Psi_0(f_x, f_y)|^2 \tag{9}$$

这表明 $|\Psi(f_x, f_y)|^2$ 是一个与 z 无关的不变量。综合(5) 和(7) 式可知, 纵向场 E_z 也是一个不随光束截面位置 z 变化的守恒量。

另一方面, 由于 ϵ_x 满足傍轴标量波动方程, 故也可以利用厄米–高斯展开的方法来证明 E_z 是一个守恒量。若将 ϵ_x 展开成厄米–高斯光束叠加的形式, 则有

$$\epsilon_x = \sum_m c_m\epsilon_m \tag{10}$$

其中 ϵ_m 为 m 阶厄米–高斯光束, c_m 为与坐标位置无关的展开系数。将(10) 式代入(5) 式, 并利用厄米–高斯函数的特征, 可求得[12]

$$E_z = \sum_m\left[c_m^2(2m + 1) - 2c_m c_{m-2}\sqrt{m(m-1)}\right]\frac{1}{k^2\sigma_0^2} \tag{11}$$

其中 σ_0 为展开基的高斯光束的光腰半径。很明显, (11) 式表示的是一个与截面位置 z 无关的守恒量。

傍轴光束的一阶修正场(纵向场) 能量 E_z 是一个与光束截面位置 z 无关的守恒量,而且其值完全取决于傍轴场 ϵ_x 的振幅与位相分布。这一结论使我们可以在任意一个光束截面位置处对 E_z 的值进行计算,计算公式由(5) 式给出。另外,由(5) 式还可以知道,E_z 是一个大于零的守恒量;但是在标量场近似下,$E_z = 0$。因而 E_z 为守恒量的结论不仅使我们可对其值进行方便的计算,而且其大小更反映了光束的傍轴标量近似程度,其值越小,这种近似就越精确。E_z 的这一性质可为我们提供一个比较光束的傍轴标量场近似程度的量化判据。

更为一般地,当 ϵ_x 未归一化时,可定义一近似因子 η,用它替代 E_z 来刻画光束的傍轴标量近似程度。定义 η 为

$$\eta = \frac{E_z}{E_x} \tag{12}$$

η 反映了一阶纵向场能量与傍轴场能量的相对比值,其值越小,光束的傍轴标量近似就越精确。当我们需要对两个光束的傍轴标量近似程度进行比较时,η 将起到一个很好的判据作用。由文献[5] 及式(5) 可知,$E_z \leqslant E_x$,因而近似因子 η 的取值范围为 $\eta \in [0, 1]$。

至此,我们合理地引入了一个近似因子 η,它可用于对不同光束的傍轴标量近似进行方便的比较,其值取决于光场振幅及位相的具体分布情况,对一特定的光束,它是一个恒量。至于各种实际光束,傍轴标量近似是否能用、运用此近似所带来的误差大小及如何修正等问题,显然已超出了本文的讨论内容。

3　对超高斯光束的应用

超高斯光束是目前研究得较为热烈的、包含高斯光束($n = 2$) 及理想平顶方波($n = \infty$) 在内的一大类光束。一个满足能量归一化的一维超高斯分布横向场 ϵ_x,其振幅分布函数可表示为

$$\Phi_0 = A\exp\left[-\left|\frac{x}{\sigma}\right|^n\right] \qquad (n \geqslant 2) \tag{13}$$

其中 A 为归一化系数,$A^2 = \dfrac{n2^{1/n}}{2\sigma\Gamma(1/n)}$,符号 Γ 表示伽马函数,σ 和 n 分别表示光束的光腰半径及超高斯阶数。如果光束在光腰截面上具有均匀的位相分布,则将(13) 式代入(5) 式,并利用 Γ 函数的性质可得

$$E_z = \frac{1}{k^2}\int\left|\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4k^2\sigma^2}\,\frac{4^{1/n}(n-1)}{n\sin(\pi/n)\Gamma^2(1+1/n)} \tag{14}$$

此式显示出 E_z 和 n 之间的近似线性关系。

由(14) 式,可以得到以下的几个结论:

1) 光束的光腰半径一定时,超高斯阶数 n 越大,则 E_z 越大,将超高斯场作为标量场来处理就会有更大的误差。也就是说,越是平顶的方波,越是要考虑修正项的影响。假设光腰半径 $\sigma = 10\lambda$,以超高斯光束阶数 $n = 4$ 为例,由(14) 式可求得 $E_z \approx 3.6\times10^{-4}$,这与横向超高斯场的归一化能量 1 相比显然是个小量。一般地,由于 $\sigma \gg \lambda$,因而 $E_z \ll E_x$(E_x 为横向场能量),故往往可将纵向场的作用忽略,此时傍轴标量场近似是足够精确的;

2) 超高斯光束阶数一定时,光腰半径 σ 越小,E_z 越大。因而在处理光束的聚焦特别是强聚焦问题时,傍轴标量近似将带来严重的误差;

3) 对于超高斯光束,阶数 n 越大,则光束质量因子 M^2 也越大[13, 14],因而光束质量越差的超高斯光束,对其作傍轴标量近似就越不精确。

当超高斯光束截面的位相分布不均匀时, 如为典型的球面波形式, 上述的结论也是正确的。如设波面曲率半径为 R, 则(5) 式中的第一项积分仍为(14) 式, 而第二项积分不再为零。光束聚焦时, 其$|\partial L/\partial x|^2$项增大, 使得 E_z 变大, 因而上述第二点结论是成立的。另外, 将 $\partial L/\partial x = x/R$ 代入(5) 式, 则其第二项积分为

$$\int\left|\frac{\partial L}{\partial x}\right|^2 \Phi_0^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{R^2}\int x^2 \Phi_0^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4^{1/n}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}\frac{\sigma^2}{R^2} \tag{15}$$

此式的值也随 n 的增加而增加, 故第一、三两点结论也是成立的。

4 结 论

对傍轴标量光场作修正时, 可主要考虑其一阶纵向场修正项的影响。一阶纵向场的能量是一个不随光束传输截面位置 z 变化的守恒量, 而且完全决定于傍轴标量光场的分布情况; 定义了一个近似因子 η(一阶纵向场能量与傍轴横向场能量的比值大小即 E_z/E_x), 用来作为衡量光束傍轴标量近似程度的量化判据, 其大小反映了将光束作为傍轴标量近似处理时的精确程度, η 的值越小, 傍轴标量近似就越精确。对一个具有一定光腰半径的超高斯光束, 其阶数越高, 则将其作为标量光场处理时的误差就越大, 因而越是平顶的方波, 越是要考虑其纵向场修正的影响。

在理论推导中, 假设光束在真空中沿 z 方向传输, 实际上, 所得到的结果可推广至折射率均匀分布、无吸收(增益) 线性介质中的光束传输。

参 考 文 献

1 P. A. Belanger. Beam propagation and the *ABCD* ray matrices. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(4): 196~ 198

2 A. E. Siegman. Defining the effective radius of curvature for a nonideal optical beam. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1991, **27**(5): 1146~ 1148

3 G. P. Agrawal, D. N. Pattanayak. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(4): 575~ 578

4 C. Palma, V. Bagini. Propagation of super-Gaussian beams. *Opt. Comm.*, 1994, **111**(1, 2): 6~ 10

5 DengXiming, Cao Qing, Guo Hong. The upper limit of the order of the supergaussian beams. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1996, **A23**(2): 151~ 155 (in Chinese)

6 Melvin Lax, W. H. Louisell, W. B. McKnight. From Maxwell to paraxial wave optics. *Phys. Rev. A*, 1975, **11**(4): 1365~ 1370

7 L. W. Davis. Theory of electromagnetic beams. *Phys. Rev. A*, 1979, **19**(3): 1177~ 1179

8 Marc Counture, P.-A. Belanger. From Gaussian beam to complex-source-point spherical wave. *Phys. Rev. A*, 1981, **24**(1): 355~ 359

9 G. P. Agrawal, M. Lax. Free-space wave propagation beyond the paraxial approximation. *Phys. Rev. A*, 1983, **27**(3): 1693~ 1695

10 Shojiro Nemoto. Nonparaxial Gaussian beams. *Appl. Opt.*, 1990, **29**(13): 1940~ 1946

11 Takashi Takenaka, Mitsuhiro Yokota, Otozo Fukumitsu. Propagation of light beams beyond the paraxial approximation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1985, **2**(6): 826~ 829

12 Deng Ximing, Chen Zhezun. On the invariable property of internal energy of paraxial beam cross-section. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1983, **3**(5): 385~ 390 (in Chinese)

13 A. E. Siegman. New development in laser resonators. *SPIE*, 1990, **1224**: 2~ 14

14 A. Parent, M. Morin, P. Lavigne. Propagation of super-Gaussian field distribution. *Opt. Quantum Electron.*, 1992, **24**(9): S1071~ S1079

Longitudinal Field Energy and Scalar Paraxial Approximation

Chen Huilong　Cao Qing　Fan Dianyuan
(*National Laboratory on High Power Laser and Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

Abstract If only the first-order correction to the scalar paraxial field is concerted, then the field can be expressed as $\vec{\epsilon} = [\epsilon_x, 0, \epsilon_z]$ and the longitudinal field energy E_z is proved to be constantly independent of the position z of the beam cross-section. The value of E_z stands for the degree of scalar paraxial approximation. An approximation factor η is suggested to characterize this property. The larger η, the worse degree of the approximation. Results are applied to super-Gaussian beams.

Key words scalar paraxial approximation, longitudinal field energy, approximation factor

F 原子激光新谱线研究*

F 原子激光是可见光区的气体激光, 有丰富的谱线, 自 1970 年首次运转以来已一共观察到 16 条激光谱线。我们在研究 F_2 分子激光器的过程中, 观察到输出很强的 F 原子激光, 并且观察到三条新的 F 原子激光谱线。激光器采用快放电泵浦, 激光气体放电腔体用不锈钢圆筒, 直径 309 mm, 长 128 cm, 电极采用镀镍的黄铜, 放电体积为 $0.5\times1.2\times118\ \mathrm{cm}^3$。在电极两边排列 140 只预电离火花隙。储能电容由 39 只 TDK 电容组成, 总电容量为 105.3 nF, 峰化电容是经过我们改进后的防腐蚀电容, 总电容量为 90 nF。一块镀 MgF_2 保护层的镀铝平板全反射镜和一块不镀膜的 CaF_2 平板组成谐振腔。实验测得的最大 F 原子激光能量近 4 mJ。

工作气体的充气比例为 $F_2/He = 8\%/92\%$, 总气压为 2×10^4 Pa, 放电电压为 20 kV, 用 WPG-100 平面光栅光谱仪摄谱, 曝光次数 10 次, 可获得清晰的 F 原子激光谱线。经测量, 得到的新激光谱线分别为 631.7 nm, 677.6 nm 和 722.7 nm。经过计算, 677.6 nm 谱线为 $3P^4D^0_{5/2} \rightarrow 3S^4P_{5/2}$ 跃迁; 631.7 nm 谱线可能为 $5S^2P_{1/2} \rightarrow 3P^4D^0_{1/2}$ 跃迁; 而 722.7 nm 谱线可能来自于 F 原子更高能态之间的跃迁, 因为谱线很弱, 尚待我们作进一步的研究。

F 原子激光是一种高功率的气体激光, 在泵浦染料和拉曼光谱研究方面有广泛的应用前景。

中国科学院上海光机所　上海 201800
袁才来　上官诚　庞加满　陈小春　王润文
1998 年 9 月 25 日收稿

* 国家自然科学基金资助项目。