

脉冲光束在均匀色散介质中的传播

王中阳 张正泉 徐至展

(中国科学院上海光机所 上海 201800)

提要 得到了脉冲高斯光束在均匀色散介质中传播的时域解析形式, 由此讨论了脉冲的群速度色散、脉冲波前和时空耦合。

关键词 脉冲光束, 色散, 时空耦合

1 引 言

脉冲在介质中传播的群速度色散, 造成脉冲时间波形的展宽和畸变。补偿这些色散, 对实际运用如光纤通信、脉冲激光腔的设计等非常重要, 尤其是在超短脉冲激光腔的设计中, 不仅增益介质的二阶色散需要补偿, 三阶甚至四阶色散同样需要补偿^[1,2]。自从 Kolner 和 Dijaili 等人发现平面波脉冲在色散介质中的传播与空域的傍轴波动方程有相似的形式后, 一种与空域相对应的时域分析方法如时间成像^[3]、色散 $ABCD$ 矩阵^[4] 和时间衍射积分^[5] 等被发展起来了。但对于脉冲光束在色散介质中的传播, 除了直接数值解微分方程至今未能给出一明确的解析形式。而在实际问题中, 涉及到的基本上是脉冲光束在介质及光学元件中的传播与变换问题。另一方面, Z. Bor 等人发现脉冲通过色差透镜聚焦, 由于群速度与相速度的不一致, 造成聚焦后脉冲波面的畸变^[6]。Kempe 等人还发现脉冲通过透镜, 产生的色差与球差之间相互耦合^[7]。最近, 我们发现脉冲光束在自由空间中传播, 其波面亦随着相位波前弯曲^[8]。本文在此基础上得到了脉冲高斯光束在均匀色散介质传播的解析形式, 并分析了脉冲在介质中的群速度色散、脉冲波前及时空耦合。

2 频域傍轴波动方程的初值问题与高斯光束的频域形式

在频域, 光束在介质中的传播, 可由标量波动方程给出

$$[\nabla^2 + k^2(\omega)]U(r, \omega) = 0 \quad (1)$$

其中 $k(\omega) = n\omega/c$ 为光场的波数, n 为介质的折射系数, 通常依赖于光波长。

在傍轴近似下, 众所周知, 最低阶解为高斯光束, 可写为

$$U(r, z, \omega) = A \exp \left[-ip(z) - ik \frac{r^2}{2a(z)} \right] \quad (2)$$

其中参数 $p(z)$ 与 $q(z)$ 分别由下式给出

$$q(z) = z + q_0, \quad p(z) = -i \ln \left[1 + \frac{z}{q_0} \right] \quad (3)$$

由(2),(3)式可知, 高斯光束在介质中传播的频域形式由初值 q_0 唯一确定。 q_0 称为光束的初始复曲率参数, 通常定义为

$$q_0 = i \frac{\pi n W_0^2}{\lambda} = i \frac{k W_0^2}{2} \quad (4)$$

其中 W_0 为光束的束腰。在此种定义下, q_0 似乎依赖于光场的波数。然而根据激光腔的模式理论, 在共焦腔与等价共焦腔中, 光腰尺寸依赖于波数

$$W_0 = \sqrt{\frac{L}{k}} \quad (5)$$

其中 L 为腔长。若 W_0 由上式决定, 则 $q_0 (= iL/2)$ 不依赖于波数, 仅由腔长决定。采用(5)式初始条件, 频域高斯光束可写为

$$U(r, z, \omega) = \tilde{A}(\omega) \frac{\sigma_0}{\sigma(z)} \exp \left[-i [kz + \mathcal{Q}(z)] - ik \frac{r^2}{2q(z)} \right] \quad (6)$$

其中 $q(z)$, σ_0 , $\sigma(z)$, $\mathcal{Q}(z)$ 和 z_0 分别为中心频率处的复曲率、光斑尺寸、波前曲率、附加相位和瑞利长度, 形式为

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{2}{k_0 \sigma^2(z)} \quad (7)$$

$$\sigma^2(z) = \sigma_0^2 \left[1 + \left[\frac{z}{z_0} \right]^2 \right] \quad (8)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left[\frac{z_0}{z} \right]^2 \right] \quad (9)$$

$$\mathcal{Q}(z) = \tan^{-1} \left[\frac{z}{z_0} \right] \quad (10)$$

$$z_0 = \frac{\pi n \sigma_0^2}{\lambda_0} = \frac{k_0 \sigma_0^2}{2} \quad (11)$$

$\sigma_0^2 = (k/k_0) W_0^2$, k_0 为中心频率对应的波数。 $\tilde{A}(\omega)$ 为谱振幅, 通常可表示为 $\omega - \omega_0$ 的函数, 即 $\tilde{A}(\omega) = \tilde{A}(\omega - \omega_0)$ 。

3 脉冲光束在均匀介质中传播的时空形式

考虑脉冲光束在 $z > 0$ 区域的均匀色散介质中传播, 初始谱振为 $\tilde{A}(\omega - \omega_0)$, 则在空间点 (r, z) 和 t 时刻的光场由(6)式的傅里叶变换得到

$$U(r, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(r, z, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (12)$$

假设一脉冲的初始谱分布为高斯型, 即

$$\tilde{A}(\omega) = \frac{A_0}{\delta_0} \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\delta_0^2} \right] \quad (13)$$

其中 δ_0 为谱振幅的 $1/e$ 带宽, ω_0 为中心频率。

为解得上式, 将色散关系 $k(\omega) = n(\omega) \omega/c$ 沿中心频率 ω_0 展开

$$k(\omega) = k_0 + k' \cdot (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k'' \cdot (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (14)$$

其中 $k' = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}$, $k'' = \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$, 下面我们考虑脉冲光束在二阶色散介质中的传播。

将(6),(13)和(14)式代入(12)式,可解得

$$U(r, z, t) = A_0 \frac{\sigma_0}{\sigma(z)} \exp \left[- \frac{[t - k' \Phi(r)]^2}{2[1/\delta_0^2 + ik' \Phi(r)]} \right] e^{i[\omega_0 t - k_0 \Phi(r) + \mathcal{Q}(z)]} \quad (15)$$

其中

$$\Phi(r) = z + \frac{r^2}{2q(z)} = z + \frac{r^2}{2R(z)} - i \frac{1}{k_0 \sigma^2(z)} \quad (16)$$

由上式注意到,脉冲光束在介质中的传播,可将其看成沿由复参数 $\Phi(r)$ 决定的空间流线传输。脉冲沿此空间流线的色散特性与平面波脉冲一致。

将(15)式的实部与虚部、时间与空间展开得

$$\begin{aligned} U(r, z, t) = & A_0 \frac{\sigma_0}{\sigma(z)} \exp \left[- \left[t - k' \left[z + \frac{r^2}{2R(z)} - \frac{\alpha^2 S r^2}{k_0 \sigma^2(z)} \right] \right]^2 / 2\alpha^2 \right] \times \\ & \exp \left[- \frac{r^2}{\sigma^2(z)} + \frac{k'' r^4}{2\alpha^2 k_0^2 \sigma^4(z)} (1 + \alpha^4 S^2) \right] \times \\ & \exp \left[i \left[\omega_0 - \frac{k'}{\alpha^2 k_0} \frac{r^2}{\sigma^2(z)} \right] t - ik_0 \left[z + \frac{r^2}{2R(z)} \right] + i\mathcal{Q}(z) \right] \times \\ & \exp \left[i \frac{S}{2} \left[t - k' \left[z + \frac{r^2}{2R(z)} \right] \right]^2 - i \frac{S}{2} \frac{k'}{k_0^2} \frac{r^4}{\sigma^4(z)} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{\frac{1}{\delta_0^2} + \frac{k'' r^2}{k_0 \sigma^2(z)}}{\left[\frac{1}{\delta_0^2} + \frac{k'' r^2}{k_0 \sigma^2(z)} \right]^2 + k^2 \left[z + \frac{r^2}{2R(z)} \right]^2} \quad (18)$$

$$S = \frac{k'' \left[z + \frac{r^2}{2R(z)} \right]}{\left[\frac{1}{\delta_0^2} + \frac{k'' r^2}{k_0 \sigma^2(z)} \right]^2 + k^2 \left[z + \frac{r^2}{2R(z)} \right]^2} \quad (19)$$

从(17)式可看出, α, S 分别给出了脉冲时间分布的 $1/e$ 宽度和二次相位啁啾量。脉冲光束在色散介质中传输,存在着复杂的时空耦合。与在自由空间中不同的是,其时空耦合还与介质的一阶和二阶色散有关。首先,脉冲波前沿群速度传播,其次,介质的群速度色散对脉冲的时间波形和空间分布均有影响,而且脉冲在介质中的脉宽与啁啾不仅与传输距离有关,还与横向空间位置有关。

为了估计不同傍轴点脉宽与啁啾的差异,让我们考察傍轴 $r = \sigma(z)$ 点的脉宽与啁啾得

$$\alpha^2 = \frac{\left[\frac{1}{\delta_0^2} + \frac{k''}{k_0} \right]^2 + k^2 z^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_0}{\pi m \sigma_0} \right]^2 \right]^2}{\left[\frac{1}{\delta_0^2} + \frac{k''}{k_0} \right]} \quad (20)$$

$$S = \frac{k'' z \left[1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_0}{\pi m \sigma_0} \right]^2 \right]}{\left[\frac{1}{\delta_0^2} + \frac{k''}{k_0} \right]^2 + k^2 z^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_0}{\pi m \sigma_0} \right]^2 \right]^2} \quad (21)$$

若定义 $k''/k_0 = \Delta\alpha^2$ 为脉冲通过波长距离所引起的脉冲展宽量,对一般色散介质, $\Delta\alpha^2 \ll 1/\delta^2$,

并注意到 $\lambda_0/(\pi m \sigma_0)$ 为光束的远场发散角, 在傍轴条件下, $\lambda_0/(\pi m \sigma_0) \ll 1$ 。因此横向空间位置的变化对脉宽与啁啾的影响可以忽略。脉冲光束在均匀色散介质中的脉宽与啁啾与平面波脉冲有相同量值为

$$\alpha^2 = \delta_0^2 [1/\delta_0^4 + k'' z^2] \quad (22)$$

$$S = \frac{k'' z}{\delta_0^4 + k'' z^2} \quad (23)$$

仅与群速度色散和传播距离有关。

为了更好地分析脉冲光束在介质中的时空耦合, 将(17)式改写为

$$\begin{aligned} U(r, z, t) = & A_0 \frac{\sigma_0}{\sigma(z)} \exp \left[- \left[t' - \alpha \left[\frac{v_p}{v_g} \right] \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{r^2}{\sigma^2(z)} \right]^2 / 2\alpha^2 \right] \times \\ & \exp \left[- \frac{r^2}{\sigma^2(z)} + \left[\frac{v_p}{v_g} \right]^2 \frac{r^4}{2\sigma^4(z)} \left[\frac{\delta_0}{\omega} \right]^2 \right] \times \\ & \exp \left[i\omega \left[1 - \left[\frac{v_p}{v_g} \right] \left[\frac{1}{\alpha\omega} \right]^2 \frac{r^2}{\sigma^2(z)} \right] \left[t - \left[z + \frac{r^2}{2R(z)} \right] / v_p \right] + i\mathcal{Q}(z) \right] \times \\ & \exp \left[i \frac{S}{2} t'^2 - i \left[\frac{v_p}{v_g} \right] \frac{S}{2\omega^2} \frac{r^4}{\sigma^4(z)} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$t' = t - \left[z + \frac{r^2}{2R(z)} \right] / v_g \quad (25)$$

$v_g = 1/k'$ 为脉冲传播的群速度, $v_p = c/n_0$ 为脉冲传播的相速度, $\Delta\omega = \alpha \cdot S$ 为啁啾覆盖的频率范围, $\alpha \cdot \Delta\omega = k'' z \delta_0^2$ 。当 $k'' z \gg 1/\delta_0^2$ 时, 即群速度色散引起的脉冲展宽量远大于初始的脉宽, 则 $\alpha \cdot \Delta\omega \approx \alpha \cdot \delta_0 = N$, N 为脉冲的时间带宽积。由(24)式看到, 脉冲的空间波形除了沿着波前曲率以群速度传播外, 还应有群速度色散引起另一延迟, 与轴上的脉冲相比, 傍轴脉冲峰值总的延迟量为

$$\Delta t = \frac{r^2}{2v_g R(z)} + \frac{v_p}{v_g} \frac{k'' z \delta_0^2}{\omega} \frac{r^2}{\sigma^2(z)} = \frac{v_p}{v_g} \frac{1}{\omega} \frac{r^2}{\sigma^2(z)} \left[\frac{z}{z_0} + k'' z \delta_0^2 \right] \quad (26)$$

其不仅与传播距离、群速度色散成正比, 还与脉冲在传播中的相速度与群速度的比值有关。随着传播距离的增大, 脉冲的傍轴延迟相应增大。另一方面, 介质中传播距离的延长, 脉冲宽度随之展宽, 此时相对于脉宽的傍轴延迟为

$$\frac{\Delta t}{\alpha} = \frac{v_p}{v_g} \frac{\delta_0}{N \omega} \frac{r^2}{\sigma^2(z)} \left[\frac{z}{z_0} + k'' z \delta_0^2 \right] \quad (27)$$

从中可知, 由波前曲率引起的相对延迟, 随着脉宽的增加而减小 N 倍。由群速度色散引起的相对延迟, 当 $k'' z \gg 1/\delta_0^2$ 时, $k'' z \delta_0^2 \approx N$, 因而在脉冲传播到一定距离后保持不变, 且在相对带宽 $\delta_0/\omega \ll 1$ 时可忽略。

脉冲空间分布项中存在的时空耦合仅与相对带宽的平方和相速度与群速度比值的平方有关, 与群速度色散无关。若初始的脉冲为超宽带脉冲, 不能近似为准单色光 $\delta_0/\omega \ll 1$, 则此种时空耦合导致时域光斑尺寸的增大。由(24)式可分别求得其峰值强度的轮廓和能量分布(对时间积分)的轮廓为

$$\sigma_I^2 = \frac{\sigma^2(z)}{D} [1 - \sqrt{1 - 2D}] \quad (28)$$

$$\sigma_c^2 = \sigma^2(z) \left[\frac{\omega v_g}{\delta_0 v_p} \right]^2 \left[1 - \sqrt{1 - 2 \left[\frac{\delta_0 v_p}{\omega v_g} \right]^2} \right] \quad (29)$$

其中

$$D = \left[\frac{v_p}{v_g} \right]^2 \left[\frac{1}{\alpha(\omega)} \right]^2 \left[1 - \left[\frac{z}{z_0} \right]^2 - \frac{2kz^2 \delta_0^2}{z_0} \right] \quad (30)$$

另外,从(24)式的相位项中注意到,随时间变化的一次振荡相位以相速度传播,但群速度色散产生的二次啁啾相位,却按群速度传播,使得振荡相位与啁啾相位存在一相位差。而相位项中存在的时空耦合引起载频和附加相位有一微小的修正,此种耦合一般情况下可忽略。

图 1 为脉冲光束在熔融石英(SiO_2) 玻璃中传播的时空轮廓。初始脉冲中心波长为 1064 nm, $1/e$ 脉宽为 10 fs, 初始光腰尺寸为 $10 \mu\text{m}$ 。由色散方程^[8]可知: $n_0 = 1.4496$, $v_g = 2.05 \times 10^{11} \text{ mm/s}$, $k'' = 0.0165 \times 10^{-30} \text{ s}^2/\text{mm}$ 。由图 1 可清楚地看到,脉冲在介质中传输时不仅脉宽因群速度色散而展宽,脉冲波前也受到群速度色散的影响。与自由空间传播相比,群速度色散抑制了脉冲横向空间的相对弯曲。

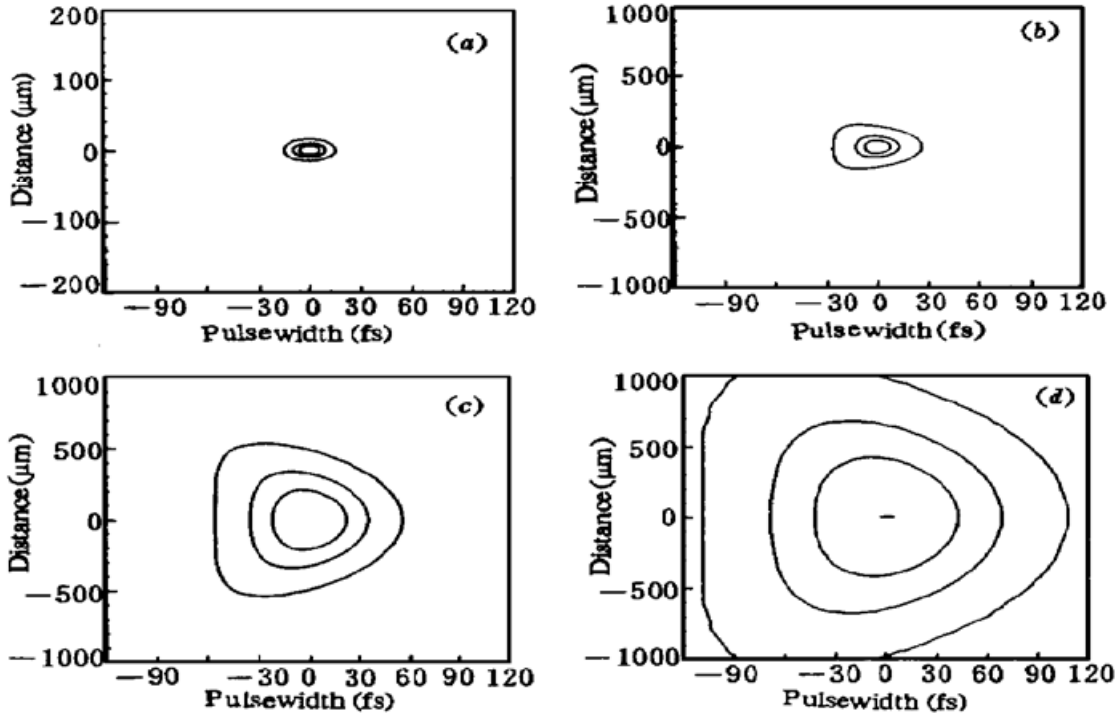


图 1 脉冲高斯光束在介质中传播的时空轮廓

Fig. 1 Contour map of the pulsed Gaussian beam in medium as observed in the planes (a) $z = z_0$; (b) $z = 10z_0$; (c) $z = 50z_0$; and (d) $z = 100z_0$. In this case: $\sigma_0 = 10 \mu\text{m}$, $z_0 = \pi\sigma_0^2/\lambda_0$, $\lambda_0 = 1.064 \text{ nm}$, and $t_0 = 10 \text{ fs}$

图 2 为在相同参数条件下,脉冲光束在介质中传播的峰值强度轮廓与能量分布轮廓。由图 2(a), (b) 可见,峰值强度的轮廓小于能量分布的轮廓,脉宽越窄,因群速度色散的作用,峰值强度轮廓越来越接近于 $\sigma(z)$ 。

4 结 论

本文得到了脉冲高斯光束在二阶色散介质中传播的解析形式,从中发现,脉冲光束在介质

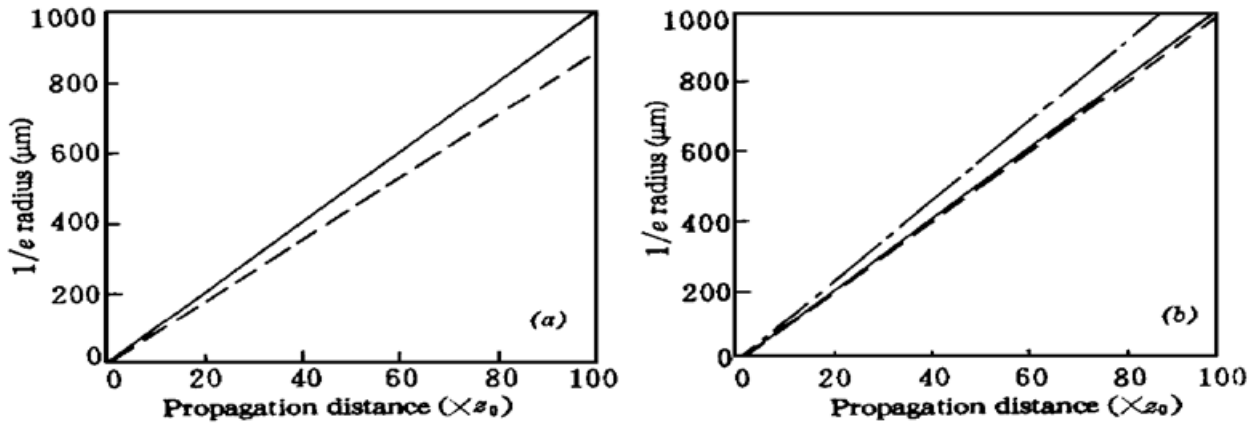


图 2 峰值强度(点线)、能量轮廓(短线)及 $\sigma(z)$ (实线) 随传播距离 z 的变化

(a) $t_0 = 10$ fs, (b) $t_0 = 1$ fs, 其他参数与图 1 相同

Fig. 2 Illustrates the peak intensity (dotted line) and energy profiles (dashed line) in comparison with $\sigma(z)$ (solid line) versus the propagating distance z

(a) $t_0 = 10$ fs, (b) $t_0 = 1$ fs. Other parameters have the same values as in Fig. 1

中传播的脉冲宽度与啁啾, 在傍轴近似下, 与平面波脉冲有相同的表达式。但脉冲光束在传播中出现的时空耦合不仅与带宽有关还与一阶二阶色散有关。群速度色散抑制了脉冲横向空间的相对弯曲。另外, 在相位中, 啁啾相位按群速度传播, 使得振荡相位与啁啾相位有一相位差。

参 考 文 献

- 1 A. Stingl, M. Lenzner, Ch. Spielmann *et al.*. Sub-10 fs mirror-dispersion-controlled Ti:sapphire. *Opt. Lett.*, 1995, **20**: 602~ 604
- 2 R. L. Fork, C. H. Brito Cruz, P. C. Becker *et al.*. Compression of optical pulses to six femtoseconds by using cubic phase compensation. *Opt. Lett.*, 1987, **12**: 483~ 486
- 3 B. H. Kolner, M. Nazarathy. Temporal imaging with a time lens. *Opt. Lett.*, 1989, **14**: 630~ 632
- 4 S. P. Djaili, A. Dienes, J. S. Smith. ABCD Matrices for dispersive pulse propagation. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1990, **QE-26**: 1158~ 1164
- 5 张筑虹, 范滇元. 光学系统的时间衍射积分及其应用. *光学学报*, 1992, **12**: 179~ 182
- 6 Z. Bor. Distortion of femtosecond laser pulses in lenses and lenses systems. *J. Mod. Opt.*, 1988, **35**: 1907
- 7 M. Kempe, W. Rudolph. Femtosecond pulses in the focal region of lenses. *Phys. Rev. A*, 1993, **48**: 4721
- 8 王中阳, 张正泉, 徐至展. 短脉冲高斯光束的时空形式. *光学学报*, 待发表
- 9 I. H. Malitson. Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica. *J. Opt. Soc. Am.*, 1965, **55**: 1205~ 1209

Exact Solution of the Pulsed Beam Propagation in Homogeneous Dispersive Media

Wang Zhongyang Zhang Zhengquan Xu Zhizhan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

Abstract In this paper, we derived an analytical solution of the pulsed beam propagating in the second-order dispersive medium. Then, the GVD (group-velocity dispersion), pulse front and the space-time coupling of the pulse are analyzed.

Key words ultrashort pulse, dispersion, space-time coupling