第 24 卷 第 8 期
1997 年 8 月

中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS

Vol. A24, No. 8
August, 1997

关于光束质量因子 M^2 的几点看法*

杨焕雄 赵道木 陆璇辉 王绍民
(杭州大学物理系 杭州 310028)

提要 通过分析光束远场发散角的二阶矩定义的局限性, 讨论普遍情形下远场发散角的定义方法, 提出并举例论证了"M^2 因子本质上是光束准直性的量度, 在介质中传输的光束当非线性效应不可忽略时其光束质量 M^2 因子不受 $M^2 \geqslant 1$ 判据限制"的观点, 重申了 $M^2 \geqslant 1$ 与量子力学测不准原理在物理内容上的无关性。

关键词 M^2 因子, 远场发散角, 角谱理论, 非线性自聚焦, 测不准原理

光束质量是衡量激光光束优劣的一项重要指标。光束质量的评估与控制是应用激光领域内的基础性研究课题。历史上光束质量的定义是混乱的, 曾针对不同的应用目的提出过不同的表征光束质量的参数。九十年代初, Siegman 建议采用 M^2 因子统一地描写激光光束的质量[1]。M^2 因子概念的提出基本上结束了光束质量测量方面无统一标准的局面, 为激光光束质量的评估和控制奠定了坚实的理论基础。几年来, 激光界针对 M^2 因子在理论上实验上做了多方面的研究[1~5], 极大地深化了人们对 M^2 因子概念和激光光束质量的认识。不过, 目前在 M^2 因子的理解和使用上尚有一些急需澄清的困惑, 尤其是存在着理论上的 $M^2 \geqslant 1$ 不等式[1,2]与实验上发现的 $M_e^2 \approx 0.3$ "超衍射极限"新光束[4]之间的尖锐"矛盾"。倘若这些困惑与矛盾得不到及时的解决, 势必影响我们对于光束质量本质的认识, 阻挠激光光束传输规律的研究和应用。本文通过分析 M^2 因子的定义, 重申了 M^2 作为光束准直性的量度的基本意义, 指出了 $M^2 \geqslant 1$ 判据的适用范围, 并对上述矛盾的解决提供了一条可能的途径。

1 $M^2 \geqslant 1$ 判据与量子力学测不准原理的物理无关性

M^2 的定义是[1]

$$M^2 \equiv \frac{\text{实际光束的光腰宽度} \times \text{远场发散角}}{\text{理想 Gauss 光束的光腰宽度} \times \text{远场发散角}} \tag{1}$$

光束的光腰宽度即其光斑宽度 $W(z)$ 的极小值 W_0, 而远场发散角 θ 可以直观地定义为 $\theta = \lim_{z\to\infty} W(z)/z$。文献[1] 中所考虑的实际上只是光束的线性传输, 这时光束的光斑宽度 $W(z)$ 和远场发散角 θ 均可等价地采用强度二阶矩定义。例如(在二维情形下) 考虑一束在 xz 平面上传播的光波, 设其波长为 λ, 复振幅(电场强度) 为 $E(x,z,t)$, 则

* 国家自然科学基金、浙江省自然科学基金和杭州大学科学基金资助项目。

收稿日期: 1996—06—28; 收到修改稿日期: 1996—10—10

$$W^2(z) \equiv 4\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(x - x_0)^2|E(x,z,t)|^2\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}|E(x,z,t)|^2\mathrm{d}x} \tag{2}$$

$$\theta \equiv \lambda\sqrt{\langle f_x^2\rangle} \qquad \langle f_x^2\rangle \equiv 4\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}f_x^2|\tilde{E}(f_x,z,t)|^2\mathrm{d}f_x}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{E}(f_x,z,t)|^2\mathrm{d}f_x} \tag{3}$$

式中 x_0 为复振幅峰值的横向坐标,$\tilde{E}(f_x,z,t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}E(x,z,t)\exp(-i2\pi f_x x)\,\mathrm{d}x$ 为复振幅的 Fourier 变换,f_x 为角谱理论中光束的空间频率。对于理想基模 Guass 光束, $W_0^G\cdot\theta^G = \lambda/\pi$。因此(1) 式常常又写为

$$M^2 = (\pi/\lambda)W_0\cdot\theta \tag{4}$$

这里的 W_0 和 θ 分别代表实际光束的光腰宽度和远场发散角。

Siegman 在[1]中曾经指出 M^2 因子的取值范围为 $M^2 \geqslant 1$。对此, 文献[2] 通过与量子力学中求证低速微观粒子坐标 –动量之测不准关系完全类似的方法给予了证明。值得注意的是,[2] 的证明中没有采用远场发散角的直观定义, 而是采用了(3) 式的角谱定义。[2] 的推理逻辑简单地整理如下。考虑一任意的二维光束, 设其在传播方向上某处的横向光场复振幅分布为 $E(x)$, 定义不等式

$$I(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left(\xi x - \frac{\partial}{\partial x}\right)E(x)\right|^2\mathrm{d}x \geqslant 0 \quad (\xi\text{ 为一任意实参数}) \tag{5}$$

取 $\xi = -\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|E|^2\mathrm{d}x\right]\left[2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|E|^2\mathrm{d}x\right]^{-1}$, 则此不等式化为

$$-4\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|E(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}E^*(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}E(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left[\int_{-\infty}^{+\infty}|E(x)|^2\mathrm{d}x\right]^2 \tag{6}$$

不等式(6) 的右端正比于光束强度(功率) 的平方。引入功率归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|E(x)|^2\mathrm{d}x = 1 \tag{7}$$

并通过 Fourier 变换

$$\tilde{E}(f_x) = \int_{-\infty}^{+\infty}E(x)\exp(-i2\pi f_x x)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

把(6) 式左端的第二个因子表达为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}E^*(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}E(x)\,\mathrm{d}x = -(2\pi)^2\int_{-\infty}^{+\infty}f_x^2|\tilde{E}(f_x)|^2\mathrm{d}f_x$$

则又可以把(6) 改写成

$$\left[4\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|E(x)|^2\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\lambda^2 4\int_{-\infty}^{+\infty}f_x^2|\tilde{E}(f_x)|^2\mathrm{d}f_x\right] \geqslant (\lambda/\pi)^2 \tag{9}$$

对照(2) 及(3), 把(9) 式左端的两个因子分别联系于光束的光斑宽度和相应的远场发散角。注意到上述推理中电场 $E(x)$ 对纵向坐标依赖的任意性, 不等式(9) 显然意味着 $W_0\cdot\theta \geqslant \lambda/\pi$, 于是 $M^2 \geqslant 1$。文献[2] 由此进一步提出观点: “$M^2 \geqslant 1$ 与测不准原理具有一种本质上的关联, 角谱理论中的空间频率 f_x 对应于光子动量算符的 x 分量, M^2 的大小表示着实际光束偏离衍射极限

值的程度。”

本文提出不等式 $M^2 \geqslant 1$ 的成立有一定的条件, 并对此不等式与量子力学测不准原理的关系, 以及 M^2 的意义均持有不同看法。我们认为: (一) 虽然从数学上讲不等式(9) 恒成立, 但仅仅当 $\lambda\sqrt{\langle f_x^2\rangle}$ 具有光束远场发散角的意义时这一不等式才意味着 $M^2 \geqslant 1$。当光束遵从非线性波动方程在介质中传播时, $\lambda\sqrt{\langle f_x^2\rangle}$ 将丧失远场发散角的意义, 这时 $\theta = \lim_{z\to\infty} W(z)/z$, 光束 M^2 因子的取值不再受不等式 $M^2 \geqslant 1$ 的限制; (二) $M^2 \geqslant 1$ 与量子力学测不准关系在数学形式上的相似性反映的不过是光束线性传输过程中表现出来的波动本性。M^2 纯粹是一个经典概念, 绝不能把 $M^2 \geqslant 1$ 理解为量子理论中光子的坐标 –动量测不准关系(事实上, 光子并无坐标的概念); (三) (1) 式定义的 M^2 因子本质上量度的是光束的准直性。只是当光束线性传输时, M^2 的大小才可以等价地看成表示着光束偏离其衍射极限的程度, 此时 $M^2 \geqslant 1$ 成立。如果光束传输过程中的非线性因素不可忽略, 这些因素必定对光束的准直性和 M^2 因子的取值产生影响。当非线性引起凝聚作用时(例如光束的非线性自聚焦效应), 这种作用会抑制光束的衍射发散程度, 从而有可能使得 $M^2 < 1$。

我们将在 2, 3 两节论证论点(一), (三)。本节先考察论点(二)。在角谱理论适用的范围内, (5) ~ (9) 的演绎无疑会导致 $M^2 \geqslant 1$。根据量子力学的基本原理, 若要将此不等式与光子的坐标 –动量测不准关系对应起来, 光束的复振幅 $E(x)$ 必须能够诠释为单光子量子力学(坐标表象) 中光子的波函数。然而这是不可能的。光是一定波长范围内的电磁波, 其运动服从 Maxwell 方程组。在单光子量子力学中, Maxwell 方程组也就是光子的量子力学方程式[6]。如果光是在真空或均匀介质中传播, Maxwell 方程组可以简化为下面的标量波动方程

$$\left[\nabla^2 - \frac{\kappa}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] E(\vec{x}, t) = 0 \tag{10}$$

式中 $E(\vec{x}, t)$ 为电场强度(假设它横截于光的传播方向), c 为真空中的光速, κ 为介质的介电常数。当 κ 与时空坐标及电场强度无关时, (10) 式将退化为线性的 Klein-Gordon 方程。定义线性组合

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[E \pm i\frac{\sqrt{\kappa}}{c}\frac{\partial}{\partial t}E\right] \tag{11}$$

及二分量列矢量

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{bmatrix} \tag{12}$$

可以把此 Klein-Gordon 方程表述为 Schrodinger 形式:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi \tag{13a}$$

$$\hat{H} = -\frac{c}{2\sqrt{\kappa}}\left[(\sigma_3 + i\sigma_2)\nabla^2 - (\sigma_3 - i\sigma_2)\right] \tag{13b}$$

于是, 列矢量 $\Psi(\vec{x}, t)$ 才是坐标表象中的光子波函数, 而电场强度 $E(\vec{x}, t)$ 只是光子波函数的泛函。

上述单光子的量子力学理论事实上是不完备的。同其它的相对论性单 Bose 子量子力学一样, 单光子量子力学中存在着负几率和负能困难[6,7]。这些困难的存在从反面论证了光波的物

质性。光波是物理实在,不是几率波。与反映低速微观粒子波粒二像性的单粒子量子力学不同,光的量子理论是量子电动力学,其中电场强度表示为作用于场态矢量空间(Hilbert 空间)的线性算符[7]。光子的概念仅仅用于表示电磁场能量动量的不连续性。一个能量为 $\hbar\omega$,动量为 $\hbar\vec{k}$ 的光子实际上就是一列频率为 ω,波矢为 $\vec{k}$ 的平面电磁波。光子的测不准关系也就是量子化电磁场的光子数 – 位相测不准关系。在量子场论中,我们并不能把光子看作可以定域于空间某点处的粒子[6],谈论光子的位置坐标是无意义的。

由于电场强度既不能在量子力学的意义上看作光子的波函数,也不能在量子场论的框架内作为量子化电磁场的态矢量,它也就不能诠释为量子理论中的几率幅。因此,光束的光斑宽度及其远场发散角的定义式(2) ~ (3) 并不是量子理论中的平均值,它们其实只能是经典波动理论意义下的平均值。$M^2 \geqslant 1$ 判据不与光子(这是量子理论所特有的概念) 的测不准关系对应。前述的推导 $M^2 \geqslant 1$ 的过程与证明量子力学测不准关系在方法上的相似性只不过反映了波动的衍射共性而已。

2 自聚焦光束的 M^2 因子

不难看出,$M^2 \geqslant 1$ 判据的证明是建立在(Fourier 光学中) 角谱理论的基础之上的。这意味着所考虑的光束在传输过程中其复振幅(电场强度) 按线性波动方程演化[8]。严格说来,这样的光束只能在真空中传播。对于在介质中传播的光束,电致伸缩、热效应及 Kerr 效应等机制可能会导致介质的介电常数对光波电场的非线性依赖关系[9]。于是,介质中传播的光束一般将遵从非线性波动方程。我们认为,在非线性效应发挥作用的场合下,(3) 式不再具有(光束的) 远场发散角的意义,$M^2 \geqslant 1$ 判据亦将失效。

考虑在介质中传播的频率为 ω 的单色光波,$E(\vec{x}, t) = U(\vec{x})\exp(i\omega t)$,由(10) 式可知复振幅 $U(\vec{x})$ 满足定态方程

$$(\nabla^2 + k^2)U(\vec{x}) = 0 \quad \left(k = \frac{\sqrt{\kappa}\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\right) \tag{14}$$

根据 Fourier 变换的数学理论,只要 $U(\vec{x})$ 在区间$(-\infty, +\infty)$ 有定义,它就可以表达成下面的 Fourier 积分

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f_x, f_y, z)\exp[i2\pi(f_x x + f_y y)]\mathrm{d}f_x \mathrm{d}f_y \tag{15}$$

然而若想把其中的 Fourier 分量解释为此光波所包含的平面电磁波分量,把空间频率 (f_x, f_y) 联系于相应平面波分量波矢的方向余弦,则必须有[8]

$$A(f_x, f_y, z) = A_0(f_x, f_y)\exp\left[i2\pi\frac{z}{\lambda}\sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right] \tag{16}$$

众所周知,(16) 式成立的前提是定态方程(14) 变为 Helmholtz 方程(折射率 $\sqrt{\kappa}$ 变为常数)。这显然要求光束按照线性微分方程在时空中演化。

非线性现象存在时,(16) 式不再成立,(3) 式因而不再表示光束的远场发散角。尽管如此,(1) 式给出的 M^2 因子仍可作为描写光束质量的参数。其中光束的光腰宽度仍由(2) 式定义的二阶矩给出,但远场发散角的定义应改变为[3]

$$\theta \equiv \lim_{z\to\infty} W(z)/z \tag{17}$$

此式的物理意义非常直观。注意到(基于角谱理论导出的) Siegman 公式[1,2]

$$W^2(z) = (W_0)^2 + (\lambda f_x)^2 z^2 \tag{18}$$

(17) 式在线性光学情形下将自动回到(3) 式。然而采用(17) 式作为光束的远场发散角之后, M^2 因子(1) 量度的是光束的准直性程度。M^2 因子的大小与光束的衍射性质有关, 但(一般情形下) 不完全取决于衍射性质。直接从(2), (17) 式出发并不能证明(1) 式的 M^2 一定不小于 1。

下面拟以自聚焦光束为例, 说明有非线性效应存在时光束质量因子 M^2 的取值可以小于 1。自聚焦现象在大功率激光光束的研究中占有重要地位[5]。这种现象主要是由于介质的介电常数依赖于光束强度所致[9]。作为一级近似, 设

$$\sqrt{\kappa} = n_0 + \frac{1}{2} n_2 |E|^2 \tag{19}$$

式中 n_0 为介质未受扰动时的折射率, n_2 为折射率非线性系数。把(19) 代入(10) 式, 假设非线性项远小于线性项, 则在复振幅(电场强度) $E(\vec{x}, t)$ 随 z 缓慢变化的近似下, $E(\vec{x}, t) = u(\vec{x}) \exp(i\omega t - ikz)$,

$$-i\frac{\partial u}{\partial q} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + 4\alpha |u|^2 u = 0 \tag{20}$$

式中 $q \equiv \frac{z}{2k}$, $\alpha \equiv \frac{k^2 n_2}{4 n_0}$ 而 $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega n_0}{c}$, λ 为不计非线性效应时介质中光的波长。

为简单计, 以下仅讨论二维情形。令 $u(\vec{x}) = u(x, z)$, 则(20) 式化为著名的非线性 Schrodinger 方程

$$-i\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\alpha |u|^2 u = 0 \tag{21}$$

这是可用经典逆散射方法精确求解的孤立波方程, 其(满足功率归一化条件的) 单孤子解为[10]

$$u(x, q) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\exp[i\beta x - i(\alpha^2 - \beta^2) q - i\varphi]}{\cosh[\alpha(x - x_0) + 2\alpha\beta q]} \tag{22}$$

此解包含有三个任意常数 x_0, β 和 φ。φ 显然是一不感兴趣的位相因子。根据双曲函数的特点, $u(x, q)$ 只在 $x \approx x_0 - 2\beta q = x_0 - \beta z/k$ 处才显著地不为零。因此, 孤子解(22) 式描写的是一沿传输方向不发散的光束。这一现象的物理原因是, 衍射效应造成的发散与非线性引起的压缩达到了平衡, 从而使光束的能量在波的传播过程中始终能保持在一个小范围内。由(22) 式可见, $z = 0$ 处光束横向截面的中心位于 x_0, 随着 z 的增益, 光束横向截面的中心移至 $x_{center} = x_0 - \beta z/k$。根据(2) 式, 光束(22) 的光斑宽度 $W(z)$ 定义为

$$W^2(z) = 4\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_{center})^2 |u(x, q)|^2 dx = \frac{2}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 d\xi}{\cosh^2 \xi} \leqslant \frac{4\pi}{\alpha^2} \tag{23}$$

即由(22) 式描写的光波具有有限束宽, 且此光斑宽度不随光的传输变化。这一结果恰好说明了孤立波(22) 在传输过程中的不发散特征。将(23) 式代入(17) 式可知远场发散角为零。故此单孤子光束的 $M^2 = 0$, 从理论上讲, 其准直性达到了最高程度。

3　讨　论

本文通过分析角谱理论的适用条件指出了光束远场发散角的二阶矩定义的局限性, 讨论了普遍情形下远场发散角的定义方法。按照本文的观点, M^2 因子本质上量度的是光束的准直性。只有当非线性效应可以忽略时这一参数才表征光束偏离衍射极限的程度。考虑到强功率光

束在介质中传输时不可避免的非线性自作用时，$\lambda\sqrt{\langle f_x^2\rangle}$ 与 $\lim_{z\to\infty} W(z)/z$ 不等价，它一般地并不能诠释为光束的远场发散角。所以，光束按非线性规律传输时其 M^2 因子可以取任意值。特别是，M^2 允许小于 1。$M^2 < 1$ 表示非线性因素产生的是压缩作用(类正透镜)，它在一定程度上抑制了光束的衍射发散，使光束的能量在传输过程中保持在线性波动理论禁戒的空间范围内。$M^2 < 1$ 的光可以通过非线性自聚焦效应实现。

由于理论实验两方面均存在着光束质量 $M^2 < 1$ 的可能性，把"$M^2 \geqslant 1$ 判据"这样一个仅在线性波动光学现象中有意义的经典不等式与量子理论中光子的测不准关系(准确地说应该是量子化电磁场的测不准关系)从物理上区别开来就显得非常重要。另外，光学现象中发现的 $M^2 < 1$ 事例绝不应视为非相对论量子力学测不准原理的失效，不应利用与现有量子理论不甚协调的"形变测不准关系"理解论文[4]报道的实验结果。M^2 只是一个经典概念。作为一种物理实在波，光可以按照非线性波动方程的规律在介质中传输，正是由于非线性的凝聚作用促成了强自聚焦传输过程中光束的 $M^2 < 1$。与此不同，非相对论量子力学中实物粒子的波动性是几率波。量子力学几率解释的基础是态叠加原理，后者保证了低速微观粒子在运动过程中其波函数必定服从线性波动方程(Schrodinger 方程)。量子测量过程中必有 $\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \hbar/2$。

致谢 杨焕雄感谢与李 康，盛正卯两博士及朱九皋硕士的讨论。

参 考 文 献

1 A. E. Siegman. New developments in laser resonators. D. A. Holmes, Edit, *Proc. SPIE*, 1990, **1224**: 2
2 陈培锋，丘军林. 各种实际光束的 M^2 参数特性比较. 中国激光, 1995, **A22**: 139
3 吕百达，张 彬，蔡邦维. M^2 因子概念和激光光束质量控制. 激光技术, 1992, **16**: 278
4 C. Pan, S. Wang. A CO_2 laser with $M_x^2 < 1$. *Optik*, 1996, **101**: 184
5 王绍民，赵道木，朱九皋. 受控非线性自聚焦. 应用激光, 1996, **16**: 50
6 A. I. Akhiezer, V. B. Berestetskii. Quantum electrodynamics. New York: Interscience Publishers, 1965, 1~11
7 C. Itzykson, J. B. Zuber. Quantum field theory. New York: McGraw-Hill Inc., 1980, 48: 128
8 J. W. Goodman. Introduction to Fourier optics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968, 50
9 A. K. Ghatak, K. Thyagarajan. Contemporary optics. New York: Plenum Press, 1978, 279~300
10 L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan. Hamilton method in the theory of soliton. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987, 126~128

Several Viewpoints Related to the Beam Quality Factor M^2

Yang Huanxiong Zhao Daomu Lu Xuanhui Wang Shaomin
(*Department of Physics, Hangzhou University, Hangzhou* 310028)

Abstract By analysing the limitation of the second-moment definition of divergence angle and redefining this angle which is related to the beam-width, we pointed out that the quality factor M^2 is essentially a measure of the beam collimation. Taking the nonlinear self-focusing optics phenomenon as an example, we illustrated that this factor could be smaller than one if the possible nonlinear effects become important. The discrepancy between the inequality $M^2 \geqslant 1$ in linear optics and the uncertainty relation of quantum mechanics was also emphasized.

Key words the quality factor M^2, divergence angle, angular spectrum theory, nonlinear self-focusing, uncertainty principle