

# 光学分形图像的产生\*

冯少彤

(南京师范大学物理系 南京 210097)

金国钧 章程军 冯璧华

(南京大学物理系 南京 210093)

田德森

(南京大学地理信息系统与遥感所 南京 210093)

**提要** 叙述了获得分形图像的一种光学方法。这种方法是通过光学傅氏变换所获得的一系列初始图像进行卷积。如果所有的图像具有相同的傅里叶光谱特征,而这些光谱却具有着不同的尺度,在输出平面上便可获得分形图像。实验表明,用这种方法可在光学上产生简单的规则分形图像。

**关键词** 傅里叶变换,卷积,分形图像

## 1 引言

分形图像是局部和整体存在相似性的图像<sup>[1,2]</sup>。在光学领域中如何产生分形图像已经愈来愈多地被人们所重视。一般来讲,一个复杂的分形图像可以由一个单一的基本图像产生,它是通过一定的变换系统来产生的,这个变换系统可以包括光学变换、数据采集、计算机处理和信息反馈<sup>[3]</sup>。虽然这类系统可以完全和有效地产生复杂的分形图像,但是它要求具有复杂的仪器设备和昂贵的费用。

本文介绍了一种简单的光学方法,这种方法完全不同于传统方法,它是用卷积的方法来获得光学分形图像的,图像的精微程度取决于卷积图像的数量。该方法有如下优点:设备仪器较少、费用较低、操作方便。

## 2 产生分形图像的基本原理

卷积和分形图像之间的关系可以从卷积定义方面来研究<sup>[4]</sup>

$$A_1(v) * A_2(v) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\alpha) A_2(v - \alpha) d\alpha \quad (1)$$

这里 \* 符号表示卷积,  $v$  为空间频率。假如以空间频率  $v_x$  为横轴,取两个一维脉冲函数  $A_1(v_x)$  和  $A_2(v_x)$  为

$$A_1(v_x) = \delta(v_x - v_1) + \delta(v_x + v_1) \quad (2)$$

$$A_2(v_x) = \delta(v_x - v_2) + \delta(v_x + v_2) \quad (v_1 > v_2) \quad (3)$$

\* 国家自然科学基金资助项目,批准号 49571059。

上式  $v_1, v_2$  为参数,  $A_1$  和  $A_2$  的卷积可以表示为排列在  $v_x$  轴上的 4 个  $\delta$  函数的总和

$$A_1(v_x) * A_2(v_x) = \delta_1(v_x - v_1 - v_2) + \delta_2(v_x - v_1 + v_2) + \delta_3(v_x + v_1 - v_2) + \delta_4(v_x + v_1 + v_2) \quad (4)$$

在 4 个  $\delta$  函数中, 前两个函数  $\delta_1$  和  $\delta_2$  距离为  $2v_2$ ,  $\delta_1$  和  $\delta_2$  对称分布在  $v_x = -v_1$  的两旁。它们对应于  $A_2$  中的两个  $\delta$  函数的位置,  $\delta_3$  和  $\delta_4$  也是同样的情况, 仅仅对称中心在  $v_x = v_1$ 。另一方面两个对称中心  $v_x = \pm v_1$  具有距离  $2v_1$ , 相应于  $A_1$  中的  $\delta$  函数的位置。所有这些表示出由两个原始函数所产生的 4 个  $\delta$  函数的位置, 体现了两个卷积函数  $A_1$  和  $A_2$  的相互关系。如果增加脉冲函数到  $A_n(v_x)$ , 每个脉冲函数  $A_i(v_x)$  对应一个参数  $v_i$ , 其卷积结果使  $\delta$  函数的数目为  $2^n$ 。 $n$  是迭代数目。卷积的结果包括了每个函数的卷积特性。如果相邻卷积函数的参数  $v_i, v_{i+1}$  的比率是常数的话, 则这个结果呈现自相似性质, 迭代数取决于卷积函数的数目。

在光学上为了实现卷积, 应用以下傅氏变换公式<sup>[4]</sup>

$$\mathcal{F}[a_1(x) \cdot a_2(x) \cdots a_n(x)] = A_1(v_x) * A_2(v_x) * \cdots * A_n(v_x) \quad x \in R^2 \quad (5)$$

这里  $A(v_x)$  是  $a(x)$  的傅氏变换, 符号  $\mathcal{F}$  表示傅氏变换,  $v_x$  是空间频率, 因此在实验上通过光学的傅氏变换能够实现卷积。

为了获得点阵分形,  $a_i(x)$  应当有  $A + B \cos(2\pi v_i x)$  的形式, 它的  $FT$  由三个  $\delta$  函数组成, 这里  $A$  和  $B$  是和相对光强有关的常数。

考虑到  $a_1$  与  $a_2$  两个初始函数的变换:  $\mathcal{F}[a_1(x) \cdot a_2(x)]$  应由以  $v_x$  为轴的频域空间的  $\delta_1(v_x - v_1 - v_2) + \delta_2(v_x - v_1) + \delta_3(v_x - v_1 + v_2) + \delta_4(v_x - v_2) + \delta_5(x) + \delta_6(v_x + v_2) + \delta_7(v_x + v_1 - v_2) + \delta_8(v_x + v_1) + \delta_9(v_x + v_1 + v_2)$  组成(这里我们忽略了每项前面的系数)。其中  $\delta_2, \delta_5$  和  $\delta_8$  的位置取决于函数  $a_1(x)$  的傅氏变换, 它们是卷积结果的第一级, 其它  $\delta$  函数可看作第二级。假如脉冲函数的个数增加到  $n$ , 则包含了  $3^n$  个  $\delta$  函数, 卷积图像呈现  $n$  重迭代。为了体现图像的自相似性, 所有参数  $v_i$  不能任意选择, 按照下述条件

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_3}{v_4} = \cdots = \frac{v_{n-1}}{v_n} = k \quad (6)$$

$k$  是大于 3 的常数, 在卷积结果中所有  $\delta$  函数将有规则地按不同级分布着, 最终的图像是分形结构的, 图中更精细的部份对应于高的空间频率。

根据上述情况的推论, 我们也能实现一系列二维脉冲函数的卷积, 这些脉冲函数是  $A + B \cos(2\pi v_x x) \cdot \cos(2\pi v_y y)$  的傅氏变换, 输出(变换)平面上呈现二维自相似图像。空间点阵的尺度大小能随常数  $k$  的数值变化。进一步, 假如以不同角度旋转其中的  $a(x)$  输出图像便能呈现不同结构的点阵分形图像。

### 3 实验和结果

根据上述情况原始函数  $a(x)$  应是正弦振幅光栅, 所以我们采用了马赫-陈德尔干涉仪的光路拍摄得到各种不同空间频率的正弦振幅光栅。最终的两束相干光以小夹角  $2\theta$  在放有底片的位置上相遇, 如果将底片旋转  $90^\circ$ , 并以合适的时间再曝光一次可获得二维正弦振幅光栅。

图 1 表示光学傅氏变换装置, 采用 10 mW 的 He-Ne 激光光源。原始物函数  $a_1(x), a_2(x) \cdots$  位于傅氏变换透镜  $L_2$  的前焦面  $I$  上, 后焦面  $O$  是输出(变换)平面, 其上放有底片。实验结果图 2(a) ~ (c) 显示出一个获得一维点阵分形图象的过程。

当获得图 2 (a) 时, 在平面  $I$  上没有放原始物函数  $a(x)$ , 然而, 在面  $I$  上放置一个原始物函数为  $A + B\cos(2\pi\nu_x x)$  的原始物, 变换平面上便由一点变成 3 个点, 如图 2(b) 所示, 下一步重复相同的过程, 3 个点中的每个点可分别产生其他 2 个点, 如图 2(c) 所示, 这是由于通过叠置作为原始物的二张图像而产生出来的, 其它依次类推。实验结果图 3 显示出又一个产生点阵分形图像的情况, 只是原始物函数  $a(x)$  为  $A + B\cos(2\pi\nu_x x) \cos(2\pi\nu_y y)$  的形式。

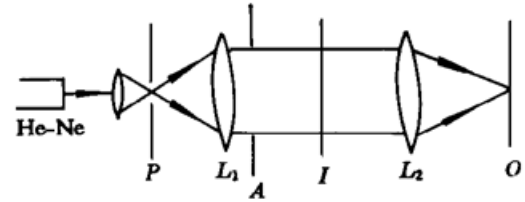


图 1 光学傅氏变换装置  
Fig. 1 Optical FT setup



图 2 (a) 初始图像, 不同迭代数目时的一维点阵分形; (b)  $n = 1$ ; (c)  $n = 2$

Fig. 2 (a) Initial pattern and the 1-D point lattice fractals at different iterations; (b)  $n = 1$ ; (c)  $n = 2$

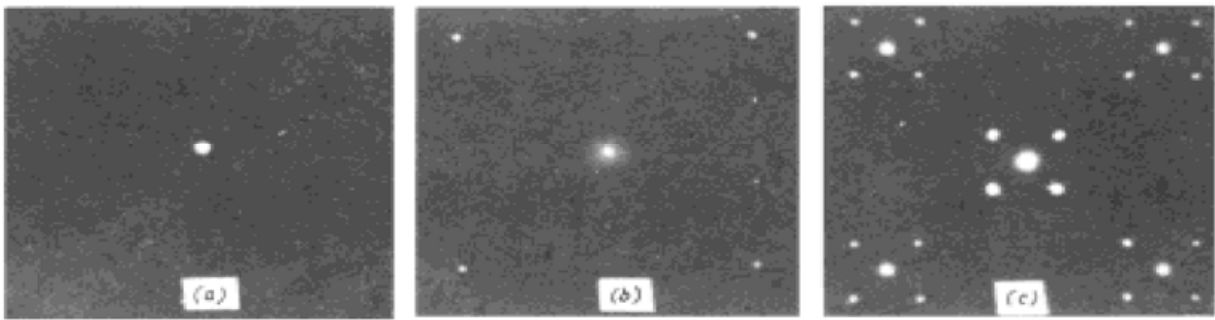


图 3 (a) 初始图像, 不同迭代数目时的二维点阵分形; (b)  $n = 1$ ; (c)  $n = 2$

Fig. 3 (a) Initial pattern and the 2-D point lattice fractals at different iterations; (b)  $n = 1$ ; (c)  $n = 2$

## 4 结 论

综上所述, 我们提出了一种获得有规分形图像的重要光学方法, 论述了其基本原理, 并给出了实验结果; 实践证明该法的优点是装置简单、产生分形图像快速、操作方便。如果我们制作一系列底片, 在每一张底片上具有三组光栅, 每组之间为  $\pi/3$  夹角, 类似情况, 可以获得更为复杂的分形图像。总之这是一种获得有规分形图像的重要光学方法。

致谢 作者感谢中国科学院院士冯端教授对本项目的指导。

## 参 考 文 献

- 1 B. B. Mandelbrot. The fractal Geometry of Nature. New York : Freeman, 1982, 95~ 96
- 2 Jin Guojun, Feng Bihua, Feng Duan. Optical Diffraction on Sierpinski Carpet. *Chinese Phys. Lett.*, 1988, 5(1) : 9~ 12
- 3 [日]谷田纯. 光学的フテクトル图形生成法. 光学, 1993, 22(1) : 18~ 19
- 4 Jack. D. Gaskill. Linear systems, Fourier transforms, and optics. Arizona: John Wiley & Sons, Inc, 1978, 160~ 201

## Generation of the Optical Fractal Pattern

Feng Shaotong

*(Department of Physics, Nanjing Normal University, Nanjing 210097)*

Jin Guojun Zhang Chengjun Feng Bihua

*(Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093)*

Tian Desen

*(Institute of GIS and Remote Sensing, Nanjing University, Nanjing 210093)*

**Abstract** An important optical method of generating fractal pattern is described. A series of primary pictures are made by optical Fourier transformation and convolution operation. If all pictures are characterized by similar Fourier spectra, which have different scales, the optical fractal pattern can be obtained in the output plane. Experiments show that the regular fractal pattern can be generated by this method.

**Key words** Fourier transformation, convolution, fractal pattern