

# 高速调幅光束的光折变四波混频的理论研究\*

李 焱 李艳秋 赵 桦 姜永远 许克彬  
(哈尔滨工业大学应用物理系 哈尔滨 150001)

**提要** 对高速调幅光束的光折变四波混频进行了理论研究。在无泵浦非耗竭近似下,给出了复耦合系数为任意值时稳态四波混频耦合波方程组的解析解。对方波调制光束情况进行了模拟计算。

**关键词** 高速调幅光束, 光折变, 四波混频

## 1 引言

利用光折变四波混频过程实现的光折变相位共轭器<sup>[1,2]</sup>和新型信息处理器件<sup>[3,4]</sup>具有广阔的应用前景。近年来, 利用慢响应的光折变效应实现高速调制光相互作用已不断引起人们的兴趣<sup>[5,6]</sup>。这种作用的物理基础在于, 当入射光束周期性地高速变化时, 由于光折变晶体的响应时间长, 只要能够保证各光束间的相对相位稳定, 也可在光折变晶体内形成稳定的光致光栅。关义春等<sup>[5]</sup>从理论上对高速调幅光束简并四波混频进行了研究, 在耦合系数为实数和纯虚数两种情况下分别对耦合波方程组进行了解析求解。过已吉<sup>[6]</sup>等人利用这一结果研究了高速调幅光束的互泵浦相位共轭器。本文从高速调幅光束四波混频的稳态方程组出发, 在没有采用泵浦非耗竭近似下, 给出了耦合系数为任意复数时方程组的解析解, 并对方波调制光束入射的情况进行了模拟计算。

## 2 理论

如图 1 所示, 设光折变晶体中四束光是偏振方向为  $y$  方向的平面波, 场强具有以下形式

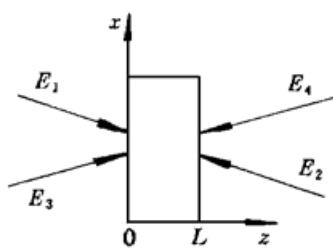
$$E_j(\vec{r}, t) = E_j(z, t) \exp[-i(\omega t - \vec{k}_j \cdot \vec{r})] + c.c., \quad j = 1, 2, 3, 4$$

初始条件为

$$\begin{aligned} E_1(0, t) &= E_{10}(t) & E_2(L, t) &= E_{2L}(t) \\ E_3(0, t) &= E_{30}(t) & E_4(L, t) &= E_{4L}(t) \end{aligned}$$

在载流子小量近似、准平衡近似、一阶光栅近似和慢变化包络近似条件下, 忽略热激发效应和吸收, 考虑到入射光束周期性高速变化和空间电荷场的时间平均效应, 可以得到高速调幅

\* 航天基金资助项目。

光束四波混频所满足的稳态方程组<sup>[5]</sup>

$$\frac{\partial E_1(z, t)}{\partial z} = (\Gamma_1 + i\Gamma_2) \frac{\bar{m}}{I_0} E_3(z, t) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial E_2(z, t)}{\partial z} = (\Gamma_1 - i\Gamma_2) \frac{\bar{m}^*}{I_0} E_4(z, t) \quad (1b)$$

$$\frac{\partial E_3(z, t)}{\partial z} = -(\Gamma_1 - i\Gamma_2) \frac{\bar{m}^*}{I_0} E_1(z, t) \quad (1c)$$

$$\frac{\partial E_4(z, t)}{\partial z} = -(\Gamma_1 + i\Gamma_2) \frac{\bar{m}}{I_0} E_2(z, t) \quad (1d)$$

图 1 四波混频简图

Fig. 1 Sketch of four-wave-mixing

其中  $\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$  为等效复耦合系数,  $m = E_1(z, t)E_3^*(z, t) + E_2^*(z, t)E_4(z, t)$  为晶体内干涉场,  $I_0$  为总光强

$$I_0 = |E_{10}(t)|^2 + |E_{2L}(t)|^2 + |E_{30}(t)|^2 + |E_{4L}(t)|^2 \quad (2a)$$

$(\cdot)$  表示该物理量在光折变晶体响应时间  $\tau_{sc}$  内的时间平均值, 对周期为  $T$  的高速时变量  $x(z, t)$ , 则有  $\overline{x(z, t)} = \frac{1}{\tau_{sc}} \int_0^{\tau_{sc}} x(z, t) dt \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(z, t) dt$ 。

如果设

$$I_\Delta = I_3(z, t) + I_4(z, t) - I_1(z, t) - I_2(z, t) \quad (2b)$$

式中  $I_j = |E_j(z, t)|^2, j = 1, 2, 3, 4$ 。对(1) 式进行简单的数学运算, 可得到如下关系式

$$\frac{d\bar{m}}{dz} = (\Gamma_1 + i\Gamma_2) \frac{\bar{m}}{I_0} \overline{I_\Delta} \quad (3a)$$

$$\frac{d\overline{I_\Delta}}{dz} = -4\Gamma_1 \frac{|\bar{m}|^2}{I_0} \quad (3b)$$

由方程组(3a), (3b) 式可得

$$4|\bar{m}|^2 + \overline{I_\Delta}^2 = C_0^2 \quad (4)$$

从(3), (4) 式得到如下关系式

$$|\bar{m}| = \frac{1}{2} C_0 \operatorname{sech}(\gamma_1 z - C_1) \quad (5a)$$

$$\overline{I_\Delta} = -C_0 \operatorname{tanh}(\gamma_1 z - C_1) \quad (5b)$$

其中  $C_0$  和  $C_1$  为积分常数。约化的等效耦合系数  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{C_0}{I_0}\Gamma$ , 其中  $\gamma_1 = \frac{C_0}{I_0}\Gamma_1$ ,  $\gamma_2 = \frac{C_0}{I_0}\Gamma_2$ 。若令  $\bar{m} = |\bar{m}| \exp[i\varphi(z)]$ , 则由(3a) 式得

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(\gamma_1 z - C_1)}{\operatorname{sech} C_1} = \varphi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(\gamma_1 z - C_1)}{\operatorname{sech} C_1} \quad (6)$$

式中  $\varphi_0$  为干涉场时间平均值的初相位。

利用上述关系式, (1) 式可化为

$$\frac{\partial E_1(z, t)}{\partial z} = \frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{2} \operatorname{sech}(\gamma_1 z - C_1) \exp \left[ i \left[ \varphi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(\gamma_1 z - C_1)}{\operatorname{sech} C_1} \right] \right] E_3(z, t) \quad (7a)$$

$$\frac{\partial E_2(z, t)}{\partial z} = \frac{\gamma_1 - i\gamma_2}{2} \operatorname{sech}(\gamma_1 z - C_1) \exp \left[ -i \left[ \varphi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(\gamma_1 z - C_1)}{\operatorname{sech} C_1} \right] \right] E_4(z, t) \quad (7b)$$

$$\frac{\partial E_3(z, t)}{\partial z} = -\frac{\gamma_1 - i\gamma_2}{2} \operatorname{sech}(\gamma_1 z - C_1) \exp \left[ -i \left[ \varphi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(\gamma_1 z - C_1)}{\operatorname{sech} C_1} \right] \right] E_1(z, t) \quad (7c)$$

$$\frac{\partial E_4(z, t)}{\partial z} = -\frac{Y_1 + iY_2}{2} \operatorname{sech}(Y_1 z - C_1) \exp\left[i\left[\Psi_0 + \frac{Y_2}{Y_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(Y_1 z - C_1)}{\operatorname{sech} C_1}\right]\right] E_2(z, t) \quad (7d)$$

(7a) ~ (7d) 式就是高速调幅光束四波混频达到稳态时所满足的基本方程组。当  $\Gamma_1 = 0$  或  $\Gamma_2 = 0$  时, 求解相对简单, 而  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  均不为零时求解过程比较复杂。本文在  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  取任意值时得到该方程组的解析解。

首先对(7a) 和(7c) 式进行求解, 先做如下替换

$$E_1(z, t) = [\operatorname{sech}(Y_1 z - C_1)]^{1/2} \exp\left[\frac{i}{2}\left[\Psi_0 + \frac{Y_2}{Y_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(Y_1 z - C_1)}{\operatorname{sech} C_1}\right]\right] A_1(z, t) \quad (8a)$$

$$E_3(z, t) = [\operatorname{sech}(Y_1 z - C_1)]^{1/2} \exp\left[-\frac{i}{2}\left[\Psi_0 + \frac{Y_2}{Y_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(Y_1 z - C_1)}{\operatorname{sech} C_1}\right]\right] A_3(z, t) \quad (8b)$$

将(8) 式代入(7a) 和(7c) 式, 得

$$\frac{\partial A_1(z, t)}{\partial z} = \frac{Y}{2} [\tanh(Y_1 z - C_1) A_1(z, t) + \operatorname{sech}(Y_1 z - C_1) A_3(z, t)] \quad (9a)$$

$$\frac{\partial A_3(z, t)}{\partial z} = \frac{Y^*}{2} [\tanh(Y_1 z - C_1) A_3(z, t) - \operatorname{sech}(Y_1 z - C_1) A_1(z, t)] \quad (9b)$$

由(9a) 式得

$$A_3(z, t) = \frac{2}{Y} \cosh(Y_1 z - C_1) \frac{\partial A_1(z, t)}{\partial z} - \sinh(Y_1 z - C_1) A_1(z, t) \quad (9c)$$

将(9c) 式代入(9b) 式中消去  $A_3(z, t)$ , 得到

$$\frac{\partial^2 A_1(z, t)}{\partial z^2} - \left(\frac{Y}{2}\right)^2 A_1(z, t) = 0 \quad (9d)$$

采用同样的方法, 从(9a) 和(9b) 式中消去  $A_1(z, t)$ , 可得到

$$\frac{\partial^2 A_3(z, t)}{\partial z^2} - \left(\frac{Y^*}{2}\right)^2 A_3(z, t) = 0 \quad (9e)$$

(9d) 和(9e) 两式的通解分别为

$$A_1(z, t) = C_3 \cosh\left[\frac{Y}{2}z\right] + C_4 \sinh\left[\frac{Y}{2}z\right] \quad (10a)$$

$$A_3(z, t) = C_5 \cosh\left[\frac{Y^*}{2}z\right] + C_6 \sinh\left[\frac{Y^*}{2}z\right] \quad (10b)$$

(10) 式中的四个系数  $C_3 \sim C_6$  只有两个是独立的, 利用初始条件  $E_1(0, t) = E_{10}(t)$ ,  $E_3(0, t) = E_{30}(t)$  以及方程组(9a) 和(9b) 式加以确定。最后求出光场振幅的解析表达式为

$$E_1(z, t) = \left[ E_{10}(t) \cosh\left[\frac{1}{2}Yz - C_1\right] + E_{30}(t) \exp(i\Psi_0) \sinh\left[\frac{1}{2}Yz\right] \right] \times \\ [\operatorname{sech} C_1 \operatorname{sech}(Y_1 z - C_1)]^{1/2} \exp\left[\frac{iY_2}{2Y_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(Y_1 z - C_1)}{\operatorname{sech} C_1}\right] \quad (11a)$$

$$E_3(z, t) = \left[ E_{30}(t) \cosh\left[\frac{1}{2}Y^*z - C_1\right] - E_{10}(t) \exp(-i\Psi_0) \sinh\left[\frac{1}{2}Y^*z\right] \right] \times \\ [\operatorname{sech} C_1 \operatorname{sech}(Y_1 z - C_1)]^{1/2} \exp\left[-\frac{iY_2}{2Y_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(Y_1 z - C_1)}{\operatorname{sech} C_1}\right] \quad (11b)$$

采用类似的求解过程, 从方程组(7b) 和(7d) 式将另两个光场  $E_2(z, t)$  和  $E_4(z, t)$  用输出光  $E_{20}(t) = E_2(0, t)$  和  $E_{40}(t) = E_4(0, t)$  表示出来, 然后令  $E_2(L, t) = E_{2L}(t)$  和  $E_4(L, t) = E_{4L}(t)$  进行反变换就可以很方便地得到输出光和输入光之间的关系

$$E_{20}(t) = \left[ E_{2L}(t) \cosh \left[ \frac{1}{2} \gamma L - C_1 \right] - E_{4L}(t) \exp[-i\varphi(L)] \sinh \left[ \frac{1}{2} \gamma^* L \right] \right] \times \\ [\operatorname{sech} C_1 \operatorname{sech}(\gamma_1 L - C_1)]^{1/2} \exp \left[ \frac{i\gamma_2}{2\gamma_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(\gamma_1 L - C_1)}{\operatorname{sech} C_1} \right] \quad (12a)$$

$$E_{40}(t) = \left[ E_{4L}(t) \cosh \left[ \frac{1}{2} \gamma^* L - C_1 \right] + E_{2L}(t) \exp[i\varphi(L)] \sinh \left[ \frac{1}{2} \gamma L \right] \right] \times \\ [\operatorname{sech} C_1 \operatorname{sech}(\gamma_1 L - C_1)]^{1/2} \exp \left[ -\frac{i\gamma_2}{2\gamma_1} \ln \frac{\operatorname{sech}(\gamma_1 L - C_1)}{\operatorname{sech} C_1} \right] \quad (12b)$$

从(2) 和(5b) 式, 积分常数  $C_0$  和  $C_1$  可由下面的方程组确定

$$\overline{I_{30}(t)} + \overline{I_{40}(t)} = \frac{1}{2}(I_0 + C_0 \operatorname{tanh} C_1) \quad (13a)$$

$$\overline{I_{3L}(t)} + \overline{I_{4L}(t)} = \frac{1}{2}[I_0 - C_0 \operatorname{tanh}(\gamma_1 L - C_1)] \quad (13b)$$

不难验证, 当  $\Gamma_2 = 0$  且  $\varphi_0 = 0$  时, (11a) ~ (11d) 式可以回到文献[5] 的(18) ~ (21) 式。

当  $\Gamma_1 = 0$  时, 由文献[5] 的(10) 式可得  $I = C_0 \operatorname{tanh} C_1$ , 于是有  $s = \frac{C_0}{2I_0} \Gamma_2 = \gamma_2$ ,  $\frac{C_0 \Gamma_2}{I_0 s} = \operatorname{sech} C_1$  和  $\frac{\Gamma_2 I}{2I_0 s} = \operatorname{tanh} C_1$ , 本文所得结果与文献[5] 相同。

对于通常的光束配置, 有  $E_{4L}(t) = 0$ , 从(12b) 式可得到相位共轭光的光强

$$I_{40}(t) = I_{2L}(t) \operatorname{sech} C_1 \operatorname{sech}(\gamma_1 L - C_1) \left| \sinh \left[ \frac{1}{2} \gamma L \right] \right|^2 = \\ I_{2L}(t) \operatorname{sech} C_1 \operatorname{sech}(\gamma_1 L - C_1) [\cosh(\gamma_1 L) - \cos(\gamma_2 L)]/2 \quad (14)$$

从输出光场的表达式可以看出, 高速调幅光束的四波混频与连续光束的四波混频相比具有不同的特点: (1) 由于此时仍然可在光折变晶体内形成稳定的相位光栅, 所以在光束之间产生能量耦合, 即使  $\Gamma_1 = 0$ , 这种能量转移依然存在; (2) 信号  $E_3(z, t)$  的相位共轭光的时间信息完全由  $E_{2L}(t)$  决定, 与  $E_{30}(t)$  无关, 有利于同光路双向信息传输; (3) 由于  $\Gamma_2$  对能量耦合有贡献, 可以通过外加电场等方法改变传输特性。

对于一般情况, 由方程组(13) 式确定常数  $C_0$  和  $C_1$  要采用数值方法。如果满足泵浦非耗竭, 求解比较简单。此时有  $E_1(z, t) \approx E_{10}(t)$ ,  $E_2(z, t) \approx E_{2L}(t)$ 。对弱耦合, 由(4) 式得  $C_0 \approx -\overline{I_\Delta} \approx I_0$ , 所以  $\gamma \approx \Gamma$ 。同时从(5) 式有  $\operatorname{tanh} C_1 \approx -1$  以及

$$\operatorname{sech} C_1 = \frac{2}{C_0} \overline{E_{10}(t) E_{30}^*(t) + E_{20}^*(t) E_{40}(t)} \exp(-i\varphi_0) \approx \\ \frac{2}{I_0} \overline{E_{10}(t) E_{30}^*(t) + E_{2L}(t) E_{40}(t)} \exp(-i\varphi_0) \quad (15)$$

如果设  $E_{4L}(t) = 0$ , 从(12a) 和(12b) 式则有

$$E_{40}(t) \approx E_{2L}(t) \operatorname{sech} \left[ \frac{\gamma L}{2} - C_1 \right] \sinh \left[ \frac{\gamma L}{2} \right] \exp(i\varphi_0) \approx \\ \frac{E_{2L}(t)}{I_0} [1 - \exp(-\gamma L)] \overline{E_{10}(t) E_{30}^*(t) + E_{2L}(t) E_{40}(t)} \quad (16)$$

如果初始光束均为连续光,  $I_0 \approx I_{10} + I_{2L} = I_{10}(1 + r)$ , 从上式可得到

$$E_{40} = \frac{E_{2L} E_{30}^* e^{\gamma L} - 1}{E_{10}^* e^{\gamma L} + r} \quad (17)$$

由于本文和文献[5] 定义的耦合系数与文献[1] 有符号之差, 所得结果与文献[1] 的(2.14c) 式略有不同。

### 3 模拟计算

和连续光四波混频相比,当入射光束之一被高速振幅调制时,输出光强具有不同的特点。本节取无调制时入射的归一化光强为  $I_{10} = I_{2L} = 1, I_{30} = 0.2, I_{4L} = 0$ , 分别对连续光和一束入射光的强度被斩波器调制成方波两种情况进行了模拟, 调制频率为 200 Hz。忽略晶体的线性吸收时, 从输出光强的表达式或直接从(1)式均可得到  $I_{4L}(t) + I_{3L}(t) = I_{10}(t) + I_{30}(t)$  和  $I_{20}(t) + I_{40}(t) = I_{2L}(t) + I_{4L}(t)$ , 所以我们只给出相位共轭光和信号透射光的输出强度  $I_{40}(t)$  和  $I_{3L}(t)$ , 并用无调制时的信号光强  $I_{30}$  归一化成无量纲的输出光强  $i_{40}(t)$  和  $i_{3L}(t)$ 。不难看出, 对连续光情况有  $i_{40} = R, R$  为共轭反射率。

**3.1**  $\gamma L = 1.25$  时相位共轭光和信号透射光的归一化输出光强  $i_{40}(t)$  和  $i_{3L}(t)$  如图 2, 其中(a) 对应于连续光情况, (b), (c), (d) 分别对应于  $I_1, I_2$  和  $I_3$  被斩波的情况。当入射光束是高速调制光时, 光折变四波混频仍能达到稳态, 形成稳定的输出。值得注意的是, 相位共轭光光强的时间信息只由反向泵浦光  $I_{2L}(t)$  决定, 与  $I_{30}(t)$  无关, 这也可从(14)式中看出。如果信号光  $I_{30}(t)$  或泵浦光  $I_{10}(t)$  是高速调制光, 虽然它们的透射光的光强带有调制信息, 但相位共轭光的光强却是稳定的, 不能反映信号光或泵浦光的时间信息。这种情况有利于同光路双向信息传输。

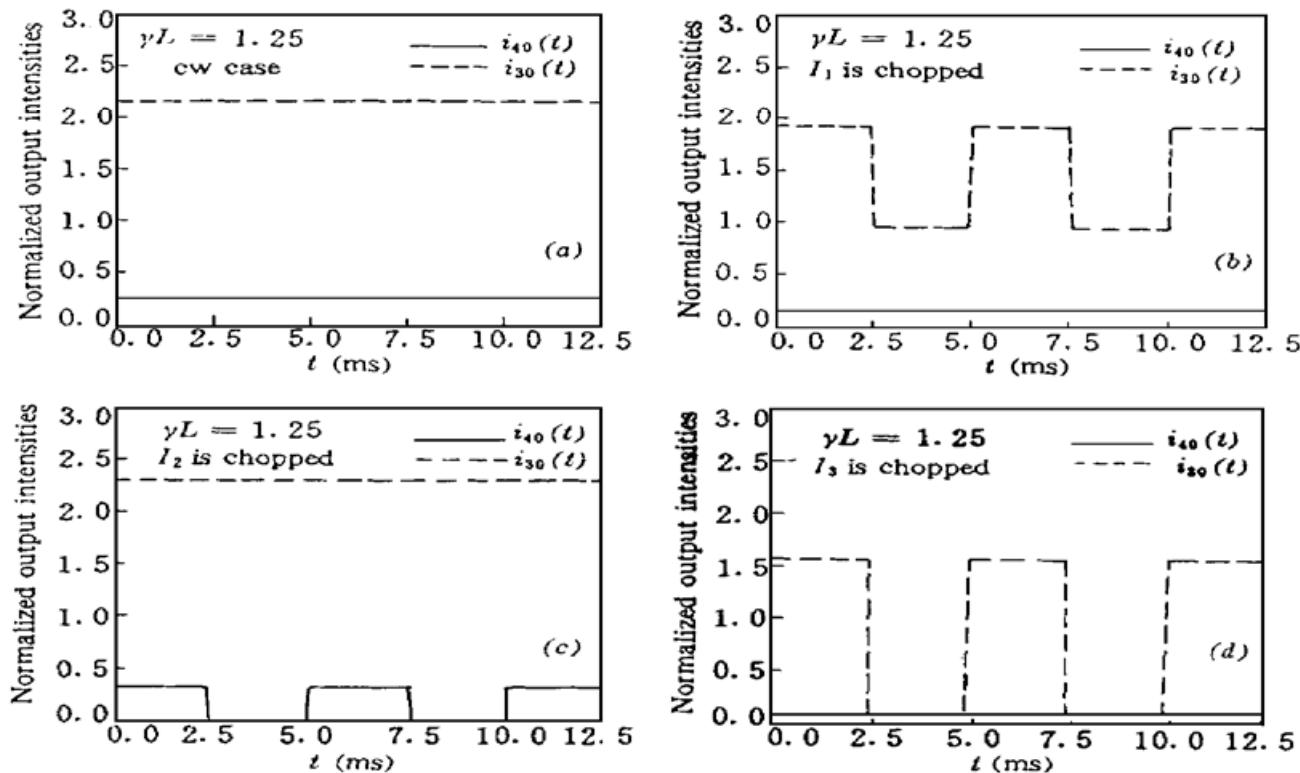


图 2 耦合强度  $\gamma L = 1.25$  时相位共轭光和信号光的归一化输出强度

(a) 连续; (b)  $I_1$  为被斩波; (c)  $I_2$  为被斩波; (d)  $I_3$  为被斩波

Fig. 2 Normalized output intensities of the phase conjugate beam and the signal beam. coupling strength  $\gamma L = 1.25$

**3.2**  $\gamma L = 1.25 + i$  时相位共轭光和信号透射光的归一化输出光强  $i_{40}(t)$  和  $i_{3L}(t)$  如图 3。和  $\gamma L = 1.25$  的情况相比, 此时的相位光强增大。结果表明, 对某些光束配置, 相位光栅与干涉条纹之间的相移角为  $\pi/2$  并不对应于最佳耦合。因此, 对扩散型光折变材料, 可以利用外加电场等方法改变相移角的大小, 以改善相位共轭光的输出强度。

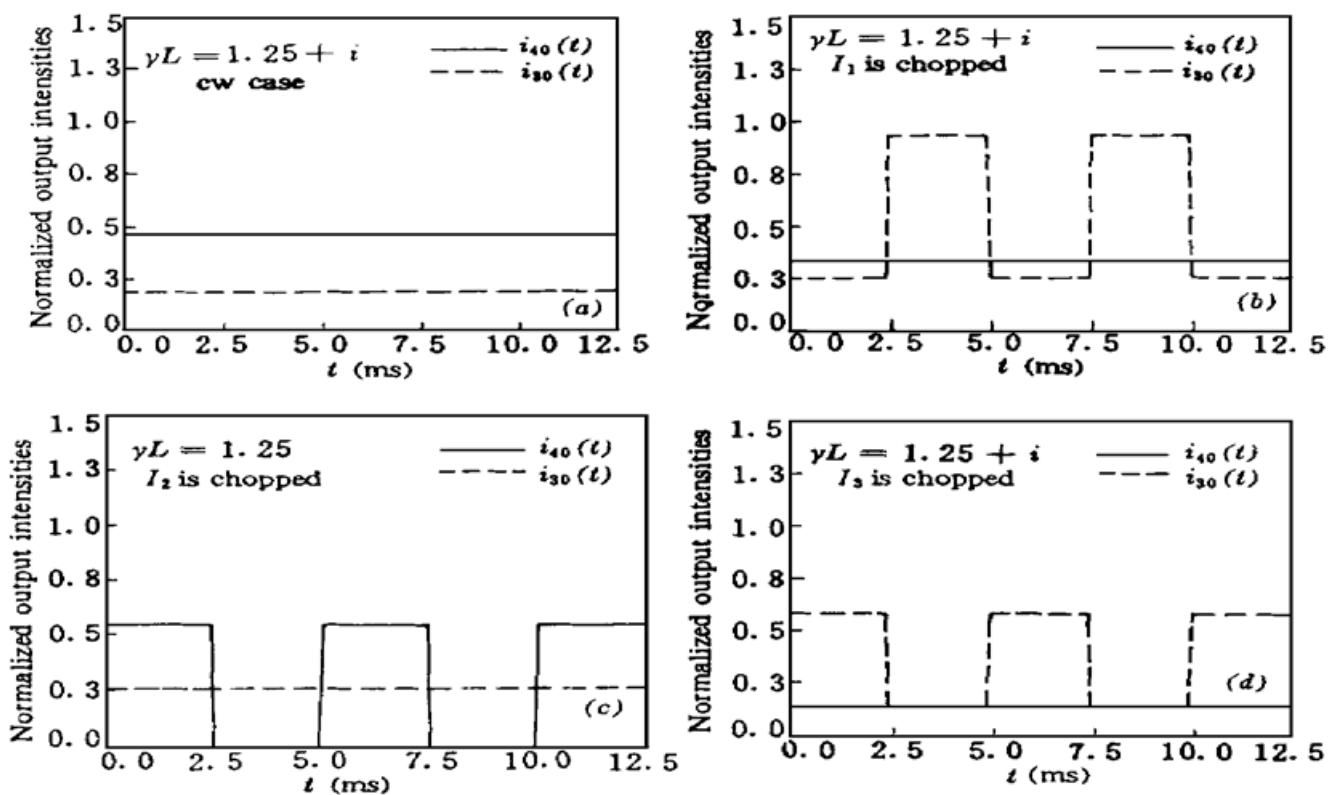


图 3 耦合强度  $YL = 1.25 + i$  时相位共轭光和信号光的归一化输出强度

Fig. 3 Normalized output intensities of the phase conjugate beam and the signal beam.

coupling strength  $YL = 1.25 + i$

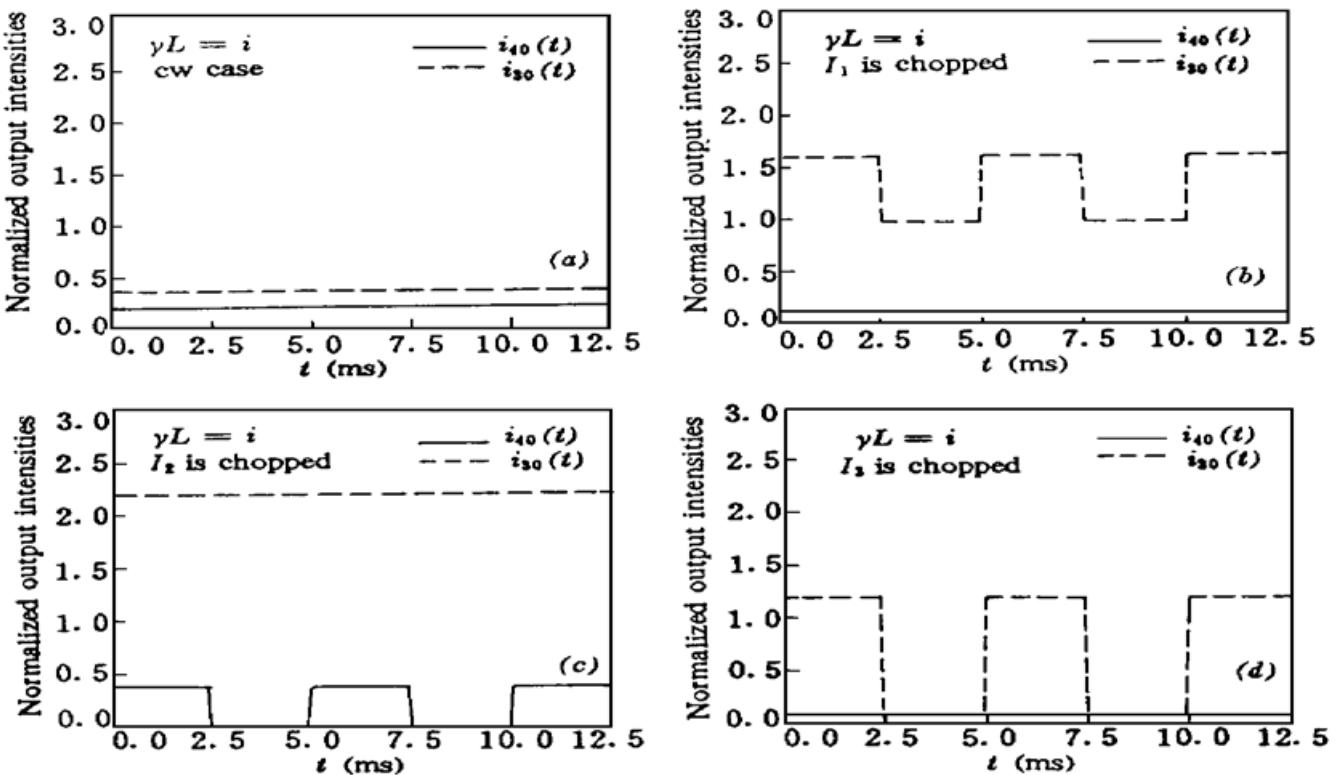


图 4 耦合强度  $YL = i$  时相位共轭光和信号光的归一化输出强度

Fig. 4 Normalized output intensities of the phase conjugate beam and the signal beam. coupling strength  $YL = i$

**3.3**  $\gamma_L = i$  时相位共轭光和信号透射光的归一化输出光强  $i_{40}(t)$  和  $i_{3L}(t)$  如图 4 所示, 此时相位光栅与干涉条纹相同。当  $\gamma_1 = 0$  时, 由(14) 式得

$$I_{40}(t) = I_{2L}(t) \operatorname{sech}^2 C_1 \sin^2 \left[ \frac{1}{2} \gamma_2 L \right] \quad (18)$$

虽然对二波耦合来说, 这种情况下不能有平均能量耦合, 但在简并四波混频中仍有能量转移, 这是由于在四波混频中有两套光栅存在而导致了相位共轭光的产生。

## 4 结 论

在没有泵浦非耗竭近似条件下, 得到了复耦合系数为任意值时高速调幅光束四波混频稳态方程组的解析解, 讨论了这种情况下高速调幅光束的传输特点, 模拟了相位共轭光和信号透射光的输出强度。理论分析和模拟计算都表明: 当入射光束是高速调幅光时, 在光折变简并四波混频过程中仍然可形成稳定的相位光栅, 从而在光束之间产生能量耦合; 相位共轭光的时间信息完全由反向泵浦光束的时间信息决定, 与入射信号的时间信息无关; 耦合系数的虚部对相位共轭光的输出强度有贡献, 因此可以通过外加电场等方法改变传输特性。

## 参 考 文 献

- 1 M. Cronin-Golomb, B. Fischer, J. O. White *et al.*. Theory and applications of four-wave mixing in photorefractive media. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1984, **QE-20**(1) : 12~ 30
- 2 D. Wang, Z. Zhang, Y. Zhu *et al.*. Observation on the coupling channel of two mutually incoherent beams without internal reflection in BaTiO<sub>3</sub>. *Opt. Commun.*, 1989, **73** : 495~ 500
- 3 J. Khouri, V. Ryan, C. Woods *et al.*. Photorefractive optical lock-in detector. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(18) : 1442~ 1444
- 4 J. Khouri, V. Ryan, M. Cronin-Golomb. Photorefractive frequency converter and phase-sensitive detector. *J. Opt. Soc. Am. B.*, 1993, **10**(1) : 72~ 82
- 5 关义春, 石顺祥, 安毓英 等. 光致折射晶体中高速调制光束的 DFWM 理论. 中国激光, 1989, **16**(11) : 668~ 673
- 6 过巴吉, 汪家友, 王立军 等. 高速调制光束的互泵浦相位共轭器的研究. 中国激光, 1995, **A22**(10) : 751~ 756

## Theoretical Study of Photorefractive Four-wave Mixing with Rapidly Amplitude Modulated Beams

Li Yan Li Yanqiu Zhao Hua Jiang Yongyuan Xu Kebin

(Department of Applied Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

**Abstract** Photorefractive four-wave mixing with rapidly amplitude modulated beams is studied theoretically. The analytical solutions for the steady-state equations of four-wave mixing with an arbitrary complex coupling constant are given without the undepleted pump approximation. The output intensities of the phase conjugate beam and the transmission beam of the signal are simulated.

**Key words** rapidly amplitude modulated beams, photorefraction, four-wave mixing