

# 大气湍流对有限带宽波前补偿系统的影响\*

张 骏 曾宗泳

(中国科学院安徽光机所 合肥 230031)

**提要** 利用高灵敏度湍流探空仪的测量结果,给出了几种典型情况下大气湍流的特征模式。着重讨论冬、夏两季平面波通过大气湍流对有限带宽的自适应光学补偿系统的影响。分析了当自适应光学闭环的频率响应传递函数为  $H(f)$  时,不同带宽波前系统的补偿效果。结果表明:当系统带宽为 40 Hz 时,Strehl 比可高于 0.85。冬季虽高空风速强于 40 m/s,但 Strehl 比没有显著减小。

**关键词** 波前补偿系统,有限带宽,Strehl 比,模式

## 1 引 言

建立高分辨率自适应光学望远镜观测站,必须选择大气湍流弱的地方,以充分发挥望远镜的效能。航天器、跟踪和控制精度,也受湍流的影响。为了给有关的光学工程提供参数,应该寻找湍流的规律,总结其特征,建立数据库。

大气湍流强度可用大气相干长度  $r_0^{[1]}$  (天文观测中的视宁度) 来衡量,自适应光学系统在不同湍流强度下的补偿效率由子孔径  $d$  和  $r_0$  之比决定。对于系统时间响应的要求则由光通过大气湍流后的相位频谱来决定。由于某些情况下高空风速远比地面强,对于波前补偿系统的频响可能有比地面高的要求。因此,自适应光学系统的补偿效率和大气湍流强度以及大气的风场有关。为了给自适应光学工程设计,包括子孔径的单元数,系统的带宽等提供大气参数,我们应用自行研制的高灵敏度湍流探空仪<sup>[2,3]</sup>,对我国的许多地区进行了长时间、不同季节的观测,为分析大气湍流的基本特征及对自适应光学系统的影响提供了参考资料。

当波前补偿系统闭环条件下的控制系统传递函数为

$$H(f) = \frac{1}{1 + i \cdot f/f_c} \quad (1)$$

时,将讨论补偿系统时间带宽对波前剩余误差的影响。这里  $f_c$  定义为该伺服系统闭环带宽, $f$  为时间频率。

## 2 实验结果与模式

大气中折射率起伏主要通过雷达观测以及气球、飞机的直接测量。球载仪器的测量既轻便又成本低,且适用于野外、偏远的地区。我们利用最新研制的球载高灵敏度湍流探空仪<sup>[2,3]</sup>,在

\* 国家高技术 863 资助项目。

局地均匀各向同性湍流假定<sup>[4]</sup>的基础上, 惯性子区域内温度结构函数  $C_T^2$  可用空间两点温度差的方均值和两点的距离  $\vec{r}$  和  $\vec{r}_1$  来表示, 即

$$C_T^2 = \frac{\langle [\theta(\vec{r} + \vec{r}_1) - \theta(\vec{r}_1)]^2 \rangle}{r^{2/3}} \quad L_0 \gg r \gg l_0 \quad (2)$$

其中,  $\langle \rangle$  代表系综平均,  $\theta(\vec{r})$  为空间位置  $\vec{r}$  的温度,  $L_0$  为湍流外尺度,  $l_0$  为湍流内尺度。对于光波, 只考虑温度起伏, 因此很容易得到折射率结构常数  $C_n^2$ 。图 1 给出球载高灵敏度湍流测量仪测香河地区  $C_n^2$  随高度变化的情况。

由于  $C_n^2$  的重要性, 在光学工程和天文测量中,  $C_n^2$  是一个不可缺的参数, 许多人根据不同的观测资料建立了  $C_n^2$  高度分布的模式。Hufnagel<sup>[5]</sup> 先后提出了几个与气象条件有关的单参数模式, 在一定程度上反映了湍流强度的高度分布。然而, 尽管 Hufnagel 模式考虑了气象要素的影响, 但单纯用风速平方平均不能描述大气湍流的复杂性和多样性, 为了使模式能应用于不同的情况, 我们以 Hufnagel 模式为基础, 同时考虑气象条件和地理位置的影响, 并以大量高灵敏度湍流测量仪得到的实验数据为根据, 对其参数进行了调配, 给出了适合于合肥(1993 年 11~12 月)、昆明(1992 年 11 月)、香河(1993 年 8~9 月) 三个不同地点、季节的  $C_n^2$  高度分布的平均模式, 分别如(3), (4), (5) 式所示, 其中  $h$  (km) 代表高度。

$$C_n^2(h) = 7.9 \times 10^{-19} h^{10} e^{-h/0.46} + 1.5 \times 10^{-16} e^{-h/3.5} + 6.0 \times 10^{-16} e^{-h/0.5} \quad (3)$$

$$C_n^2(h) = 9.3 \times 10^{-19} h^{10} e^{-h/0.41} + 3.0 \times 10^{-17} e^{-h/6.5} + 9.0 \times 10^{-17} e^{-h/0.5} \quad (4)$$

$$C_n^2(h) = 2.3 \times 10^{-22} h^{10} e^{-h} + 4.1 \times 10^{-16} e^{-h/2.3} + 1.0 \times 10^{-17} e^{-h/0.52} \quad (5)$$

模式中的第一项表示对流层上半部到平流层湍流的贡献, 第二项表示对流层湍流的贡献, 第三项表示边界层湍流的贡献。三种模式的变化如图 2 所示。这对于进一步分析不同季节、不同地点光波通过湍流大气后, 波前的变化提供了分析的模式。

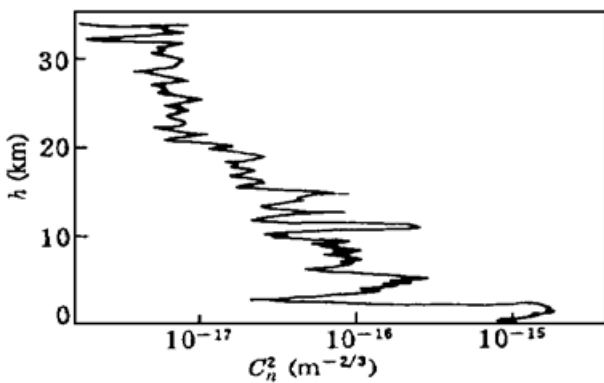


图 1  $C_n^2$  廓线随高度的变化  
时间: 1993 年 9 月 12 日, 北京时间 18:00~20:00  
Fig. 1  $C_n^2$  profiles against altitude  $h$   
12, Sep., 1993, time: 18:00~20:00

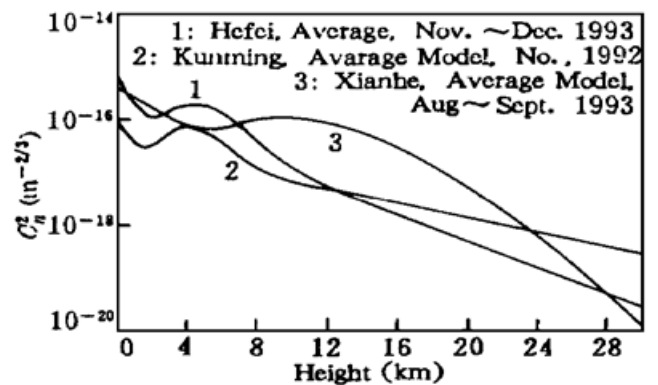


图 2 合肥、昆明、香河  $C_n^2$  廓线随高度变化的平均模式  
1: 合肥(1993 年 11~12 月); 2: 昆明(1992 年 11 月);  
3: 香河(1993 年 8~9 月)  
Fig. 2  $C_n^2$  profiles of average model for Hefei, Kunming, Xianghe, respectively

### 3 计算结果与讨论

#### 3.1 相位起伏的统计特征

大气湍流同时对光波的振幅和相位产生扰动, 由于自适应光学处理的主要是相位扰动, 因

此知道相位扰动的统计特征是必要的。

较大尺度的折射率起伏是导致光波前相位起伏的主要原因, 如时间相位起伏、空间相位起伏及到达角起伏。由于外尺度的影响, 在计算时必须考虑外尺度的大小。这是因为光学测量和雷达观测证实了高空湍流具有较小的外尺度, 我们关于剪切湍流的观测也证实了其外尺度比对流边界层湍流的外尺度要小得多<sup>[6,7]</sup>。以香河的湍流变化为例, 我们逐层分析了垂直高度上温度起伏频谱的变化, 结果表明<sup>[6]</sup>: 在 10 km 以下垂直方向上, 温度起伏谱的变化规律均可采用形式为

$$0.25C_T^2(\kappa^2 + L_0^{-2})^{-5/6} \tag{6}$$

的 van Karman 谱来描述<sup>[4]</sup>。其中  $\kappa$  为湍流的空间波数。图 3 给出的是在高度为 1.7~ 2.6 km 之间温度起伏谱。其中的折线为实验结果, 而实线为(6)式拟合的结果。从图中实测温度谱和 van Karman 谱的比较表明该形式的 van Karman 谱能较好地符合实验的结果。可见在实际应用中, 不能将  $L_0$  视为  $\infty$ , 必须考虑  $L_0$  的影响。

图 4 给出昆明地区不同季节、不同风速条件下, 平面波通过整层大气的归一化波前相位功率谱<sup>[4,8]</sup>  $W_s(f)$  与频率  $f$  的关系。为进一步说明大气湍流对相位功率谱的影响, 可将相位起伏功率谱  $W_s(f)$  改写成<sup>[9]</sup>

$$W_s \approx \frac{0.0362k^2\mu}{f^{8/3}} \cdot \sec\psi \cdot \int_0^{h_0} C_n^2(h) \cdot V^{5/3}(h) dh \begin{cases} f \ll V/\sqrt{\lambda h_0}, \mu = 1 \\ f \gg V/\sqrt{\lambda h_0}, \mu = 0.5 \end{cases} \tag{7}$$

的形式。这里  $C_n^2$  和  $V(h)$  分别为湍流模式和风速模式,  $\psi$  为天顶距,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为光波波长,  $f$  为时间频率。 $h_0$  为传输距离。图中可知在低频区( $f < 100$  Hz), 尽管冬季和夏季的风速不同, 但两个季节的相位频谱区别很小。在高频区, 由于冬季风速比夏季大, 因此夏季相位起伏频谱比冬季递减的快。

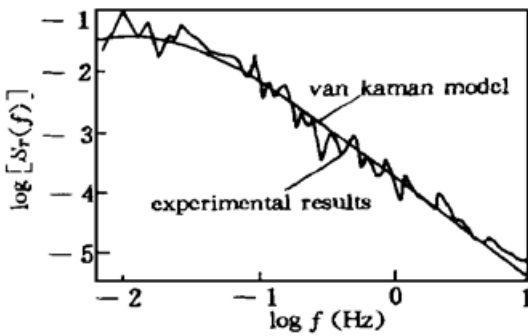


图 3 温度起伏频谱, 高度: 1.7~ 2.6 km

Fig. 3 Frequency spectrum of temperature fluctuations  
Height: 1.7~ 2.6 km

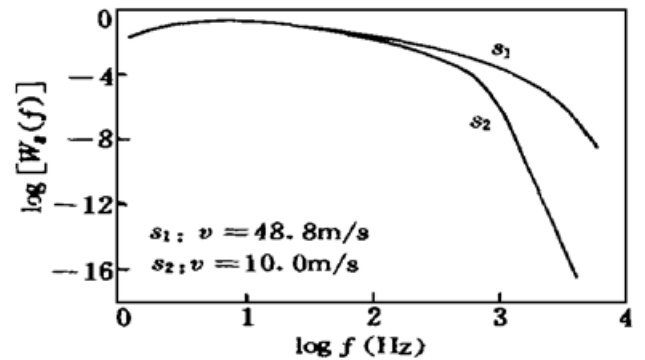


图 4 归一化的平面波相位起伏频谱

Fig. 4 Normalized plane-wave frequency spectra of the  
phase fluctuations vs frequency

在实际应用中, 间隔为  $\rho$  的两点的相位差的起伏频谱  $W_{\Delta s}(f, \rho)$  更有意义, 如用 Hartmann-Shack 测量孔径  $d$  上的波前相位倾斜等。同样对于平面波通过整层大气, 间隔为  $\rho$  的两点相位差的起伏频谱  $W_{\Delta s}(f, \rho)$  和相位功率谱<sup>[4,8]</sup>  $W_s(f)$  有简单的关系<sup>[10]</sup>

$$W_{\Delta s}(f, \rho) = 4 \cdot \sin^2 \left[ \frac{\pi \rho f}{V} \right] \cdot W_s(f) \tag{8}$$

其中,  $V$  为风速。以昆明为例, 图 5 给出了归一化起伏频谱  $W_{\Delta s}(f, \rho)$  与频率  $f$  的关系。在低频

区, 冬季和夏季风速不同, 使得夏季的差谱比冬季大。在高频区, 由于夏季风速小于冬季, 夏季相位差的起伏频谱递减的速度明显比冬季要快。

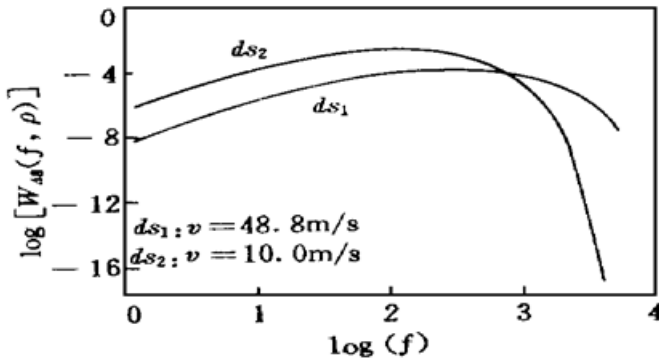


图 5 归一化的平面波相位差的起伏频谱

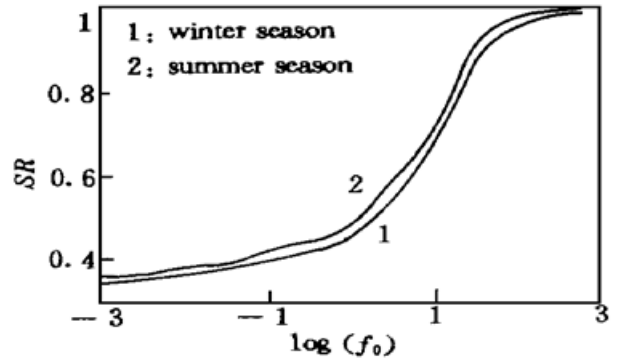


图 6 系统带宽与 Strehl 比的变化

Fig. 5 Normalized plane-wave frequency spectra of the phase-difference fluctuations vs frequency

Fig. 6 Strehl ratio vs bandwidth of the control system

### 3.2 剩余误差分析

自适应光学补偿实验中, 其误差主要包括: (1) 波前拟合误差  $\sigma_f$  的大小, 它取决于波前校准器与波前误差的吻合程度; (2) 探测误差  $\sigma_D$ , 实际上就是波前探测器输出信噪比的倒数; (3) 预测误差  $\sigma_P$ , 产生于波前扰动的测量和校正之间的时间差。总的剩余误差为

$$\sigma^2 = \sigma_f^2 + \sigma_D^2 + \sigma_P^2 \tag{9}$$

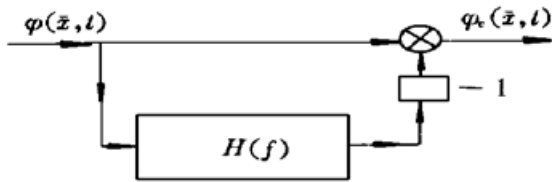


图 7 有限带宽波前相位补偿系统示意图

Fig. 7 Illustration of the phase compensation system for finite control loop bandwidth

对于一个有限时间带宽的变形镜控制系统, 如图 7 所示,  $\mathcal{Q}(\vec{x}, t)$  表示平面波通过湍流大气到达子孔径时的波前相位, 而  $\mathcal{Q}_c(\vec{x}, t)$  表示校正后的波前相位,  $W_{\Delta}(\vec{x}, f)$  为  $\mathcal{Q}(\vec{x}, t)$  的起伏功率谱, 而  $W_{c, \Delta}(\vec{x}, f)$  为相位校正后的  $\mathcal{Q}_c(\vec{x}, t)$  的起伏功率谱。因此

$$W_{c, \Delta}(\vec{x}, f) = W_{\Delta}(\vec{x}, f) \cdot H(f) \tag{10}$$

其中,  $H(f)$  为自适应光学闭环补偿系统的传递函数。因此子孔径上剩余误差  $\sigma_i$  的方均值可表示为

$$\sigma_i^2 = \int_0^{\infty} W_{\Delta}(f) |1 - H(f)|^2 df \tag{11}$$

假定湍流是各向同性的, 将式(1), (7), (8) 代入式(11), 可得到当系统传递函数为  $H(f)$  时, 湍流造成的波前剩余误差为

$$\sigma_i^2 = 0.1448k^2 \mu \cdot \sec \psi \cdot \int_0^{h_0} C_n^2(h) V^{5/3}(h) dh \cdot \int_0^{\infty} \sin^2 \left[ \frac{\pi \rho f}{V} \right] \cdot f^{-8/3} \cdot \frac{(f/f_c)^2}{1 + (f/f_c)^2} \cdot df \tag{12}$$

作变换, 令  $\alpha = f/V$ ,  $\gamma = V/f_c$ , 于是

$$\sigma^2 = 0.1448k^2 \mu \cdot \sec \psi \cdot \int_0^{h_0} C_n^2(h) V^{5/3}(h) dh \cdot F(\alpha, \gamma) \tag{13}$$

其中

$$F(\alpha, \gamma) = \int_0^{\infty} \frac{(\alpha\gamma)^2}{1 + (\alpha\gamma)^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi\rho\alpha)}{\alpha^{8/3}} \cdot d\alpha \quad (14)$$

当假定系统的时间、空间特性和大气相位三者之间无关, 则剩余相位差可表示为

$$\sigma^2 = 0.1448k^2\mu \cdot \sec\Psi \cdot \int_0^{h_0} C_n^2(h) V^{5/3}(h) dh \cdot F(\alpha, \gamma) + c_1 \times \left[ \frac{d}{r_0} \right]^{5/3} \quad (15)$$

式中,  $d$  为子孔径直径,  $r_0$  为 Fried 参数,  $F(\alpha, \gamma)$  实际上是个滤波函数。对于二维变形镜的变形是二维的, 系数  $c_1$  等于  $0.134^{[11]}$ 。当  $\sigma^2$  较小时, 可利用 Fried<sup>[11]</sup> 给出的关系, 来描述大气湍流对补偿系统补偿效果的影响。以昆明为例, 计算时选  $\rho$  等于 37 单元子孔径的直径。如图 6 所示, 尽管冬季、夏季的风速影响, 造成了波前相位频谱及相位差频谱在高频区的不同, 当平面波通过整层大气, 大气对光波前的扰动主要在低频区, 而高频区的贡献是微小的, 这使得冬、夏两季的补偿效率差别不大。从中可以得到: 当带宽为 40 Hz 时, 冬季的 Strehl 为 0.88, 夏季为 0.91; 当带宽达到 60 Hz 时, 冬季 Strehl 可到 0.92, 夏季为 0.95。由此可以得出结论: 当带宽达到 40 Hz, Strehl 比可高于 0.85。

## 4 结 论

综上所述, 使用高灵敏度湍流探测仪的测量结果, 并同时考虑气象条件和地理位置的影响, 我们给出三个能较好地反映大气湍流的变化规律的大气湍流特征模式, 为进一步分析大气湍流对波前补偿系统的影响提供了可能。由于大气湍流的复杂性和多样性, 建立的大气模式还需通过大量的实验资料加以补充和完善, 这对于天文观测和相关光学工程的设计尤为重要。

由于冬、夏两季风速的影响, 造成平面波通过整层大气的相位频谱和相位差频谱有明显区别。采用伺服系统的闭环频率特征为  $H(f)$  的 37 单元变形镜补偿相位扰动, 当带宽为 40 Hz 时, 冬季虽然风速高达 48.8 m/s, 但补偿效率仍可达到 0.85, 夏季风速为 10.0 m/s, 补偿效率大于 0.90。

以上的分析主要考虑了大气湍流对波前相位扰动的影响, 在实际的补偿实验中, 必须同时考虑波前拟合误差和波前探测误差的影响, 这是补偿系统本身不可忽视的。另外, 对于较强的大气湍流, 仅对波前相位补偿是不够的, 必须对光波振幅进行补偿。这些因素的影响将会导致系统补偿效率的下降。

**致谢** 中国科学院成都光电所李华贵博士为我们提供 37 单元自适应光学补偿系统的传递函数及有关资料, 并进行了有益的讨论, 作者表示感谢。参加此项野外实验工作的还有肖黎明, 马成胜, 翁宁泉等, 作者谨致谢意。

## 参 考 文 献

- 1 D. L. Fried. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *J. Opt. Soc. Am.*, 1996, **56**: 1372~ 1379
- 2 Zeng Z. Y., Ma Chengsheng, Liu Xiaochun *et al.*. An analysis of the turbulent structure in the unstable surface layer nearby a shelter belt. *Advances in Atmospheric Sciences*, 1989, **6**(4): 493~ 506
- 3 肖黎明, 曾宗泳. 高灵敏度温度脉动探空仪. *气象水文海洋仪器*, 1994, **3**: 33~ 38
- 4 V. I. Tatarski 著, 温景嵩, 宋正方, 曾宗泳 等译. 湍流大气中波的传输理论(中译本). 北京: 科学出版社, 1978, 18~ 24

- 5 R. E. Hufnagel. The Infrared Handbook(中译本, 第一分册). 天津, 1980, 366~ 368
- 6 曾宗泳, 张 骏, 翁宁泉 等. 温度微结构的高空气球观测. 大气科学, 1997, **21**: 379~ 384
- 7 曾宗泳. 大气温度微结构观测. 大气科学, 1983, **7**: 277~ 285
- 8 S. F. Clifford. Temporal-frequency spectra for a spherical wave propagating through atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 1971, **61**: 1285~ 1292
- 9 R. L. Fante. Wave propagation in random media: a system approach, in *Progress in Optics*, Vol. XXII, Edited by E. Wolf, Published by North-Holland Physics Publishing, A Division of Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, The Netherlands, Chap. VI, (367~ 379), 1985
- 10 V. I. Tatarski. The effect of the Turbulent atmosphere on Wave Propagation. Springfield Va. US Dep. Commerce, 1971
- 11 D. P. Greenwood. Mutual coherence function of a wave front corrected by zonal adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**: 549~ 554
- 12 宋正方 编著. 应用大气光学基础. 北京: 气象出版社, 1990, Chap. 3, 68

## Effect of Atmospheric Turbulence on the Finite-bandwidth of a Wavefront Compensative System

Zhang Jun    Zeng Zongyong

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031)

**Abstract** In this paper, several models of the vertical profile of  $C_n^2$  were given using home-made high sensitivity micro-temperature apparatus. We discussed mainly the effect of atmosphere turbulence on the finite bandwidth of a wavefront compensative system when the wavefront phase of the plane wave went through the atmospheric turbulence in summer or in winter. The Strehl ratios for various bandwidths of the wavefront compensative system were given when a closed-loop transfer function  $H(f)$  was used as a model of a closed-loop control system that processed the turbulence-induced wavefront distortions. For the low control bandwidth  $f_c = 40$  Hz, the Strehl ratio could be larger than 0.85. Although the wind speed of the free atmosphere in the winter was 40.0 m/s, much stronger than in summer, the difference of the Strehl ratio in the two seasons was small.

**Key words** wavefront compensative system, finite-bandwidth, Strehl ratio, model