

# 边界条件对高斯光束中暗空间光孤子的影响\*

陆 宏 徐建东 洪 涛 李淳飞

(哈尔滨工业大学应用物理系 哈尔滨 150001)

**提要** 概述了暗空间光孤子的基本理论,用数值计算的方法分析了不同边界条件对高斯光束中暗空间光孤子的影响。

**关键词** 数值计算,边界条件,高斯光束,暗空间光孤子

## 1 引 言

近年来有关暗空间光孤子的研究进展很快。1987 年 Pierre-Andre Belanger 等人第一次从自散焦的 Kerr 型非线性介质中光场的非线性薛定谔方程(NLS)出发,证明了在自散焦的 Kerr 型非线性介质中可能存在 TE 模线偏振的(1+ 1) 维暗空间光孤子<sup>[1]</sup>; 1991 年 G. A. Swartzlander 等人在 Na 蒸气中用连续激光第一次观察到以暗带和暗网格形式存在的(1+ 1) 维暗空间光孤子<sup>[2]</sup>; 1992 年 H. T. Tran 采用线性分析的方法分析了(1+ 1) 维暗空间光孤子的稳定性<sup>[3]</sup>; 1993 年 G. S. McDonald 等人用数值计算分析了准(1+ 1) 维暗空间光孤子的三维不稳定性<sup>[4]</sup>。

1973 年至 1995 年间国际上有关空间光孤子的研究报告近百篇,许多研究者通过实验在不同的边界条件下观察到了暗空间光孤子及其运动行为<sup>[5-7]</sup>,但没有一篇系统地研究过边界条件对暗空间光孤子的影响。本文采用数值计算的方法研究了边界条件对高斯光束中暗空间光孤子的影响。

## 2 暗空间光孤子的解析描述

当我们不考虑介质的损耗时,暗空间光孤子可以用 NLS 方程描述:

$$i \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \zeta^2} - 2|\epsilon|^2 \epsilon = 0 \quad (1)$$

其中  $\epsilon = E/E_0$  为归一化场振幅,  $\xi = Z/Z_0$  为归一化纵向坐标,  $\zeta = x/x_0$  为归一化横向坐标。这里  $E_0$  为场的最大振幅,  $Z_0 = 2n_0/(\beta \cdot |n_2| \cdot |E_0|^2)$  为孤子传播的特征尺度,  $x_0 = n_0^{1/2}/(\beta \cdot |n_2|^{1/2} \cdot |E_0|)$  为孤子宽度的特征尺度,  $n_0$  为介质的线性折射率,  $n_2$  为介质的非线性折射率,  $\beta$  为光在介质中的传播常数。

\* 哈尔滨工业大学校基金资助项目。

方程(1) 的孤子解为

$$\epsilon(\xi, \zeta) = \frac{(\lambda + i\nu)^2 + \exp Z}{1 + \exp Z} \cdot \exp(-2i\xi) \quad (2)$$

其中,  $Z = 2\nu(\zeta - 2\lambda\xi)$ ,  $\nu^2 = 1 - \lambda^2$ ,  $\nu$  和  $\lambda$  分别表征孤子的黑度和速度。当  $\nu = 1, \lambda = 0$  时, 称为黑孤子, 相位跃变为  $\pi$ ; 当  $\nu \neq 1, \lambda \neq 0$  时, 称为灰孤子, 这时孤子具有横向速度  $2\lambda$ 。

### 3 暗空间光孤子的数值算法——传播束法

(1+ 1) 维的准非线性薛定谔方程的形式为

$$-i \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + 2\sigma |U|^2 U = i\gamma U \quad (3)$$

其中,  $i\gamma U$  项为线性吸收项。

方程(3) 可以变形为

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = (\hat{D} + \hat{N})U \quad (4)$$

这里,  $\hat{D}$  为微分算符, 其中包括衍射和线性吸收效应,  $\hat{N}$  为非线性算符, 描述非线性效应, 其表达式为

$$\hat{D} = -i \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \gamma \quad (5)$$

$$\hat{N} = -2i\sigma |U|^2 \quad (6)$$

一般说来, 衍射和非线性效应在光束传播过程中是同时起作用的。而传播束法的思想是: 对于在充分小距离  $h$  上传播着的光场, 可以把它的衍射效应和非线性效应近似地考虑成各自独立地起作用, 从而得到传播光场的近似解。更具体地说, 从  $Z$  到  $Z + h$  上的传播是通过两步实现的。第一步, 让非线性项单独起作用, 即令  $\hat{D} = 0$ ; 第二步, 只让衍射起作用, 即令  $\hat{N} = 0$ 。数学上可以表述为

$$U(Z + h, X) \approx \exp(h \cdot \hat{D}) \exp(h \cdot \hat{N}) U(Z, X) \quad (7)$$

其中指数算符  $\exp(h \cdot \hat{D})$  是通过变换到频域的方法实现的, 且

$$\exp(h \cdot \hat{D}) \beta(Z, S) = \{F^{-1} \cdot \exp[h \cdot \hat{D}(i\Omega)] \cdot F\} \quad (8)$$

这里  $F$  表示傅里叶变换算符。  $\hat{D}(i\Omega)$  是通过用  $i\Omega$  取代微分算符  $\partial/\partial X$  来得到的。在频域中显然  $\hat{D}(i\Omega)$  只是个数, 计算非常简单。因此传播束法往往比差分有限元法快两个数量级。

为讨论计算误差, 由方程(4) 精确得到

$$U(Z + h, X) = \exp[h \cdot (\hat{D} + \hat{N})] U(Z, X) \quad (9)$$

又知

$$\exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}) = \exp \left\{ h\hat{D} + h\hat{N} + \frac{h^2}{2} [\hat{D}, \hat{N}] + \frac{1}{12} [h\hat{D} - h\hat{N}, h\hat{D}, h\hat{N}] + \dots \right\} \quad (10)$$

对比方程(7) 和方程(9), 再考虑方程(10) 可知误差主要来源于  $\frac{h^2}{2} [\hat{D}, \hat{N}]$ , 则可以用步长  $h$  来控制计算误差。

### 4 以高斯光束为背景的相位跃变激发出的暗空间光孤子

带有相位跃变的高斯光束的复振幅为

$$\epsilon(\zeta)|_{z=0} = \exp(i\Phi) \exp[-(\zeta/5)^2] \quad (11)$$

其中,  $\Phi = \varphi, \zeta < 0$ ;  $\Phi = 0, \zeta > 0$ 。

通过数值计算, 我们得到相位跃变  $\varphi = \pi, \frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\pi$  时高斯光束中激发出的暗空间光孤子, 见图 1~ 5。

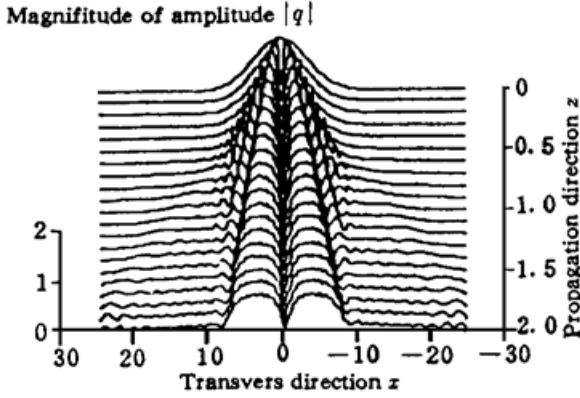


图 1  $\varphi = \pi$ , 黑孤子

Fig. 1  $\varphi = \pi$ , black soliton

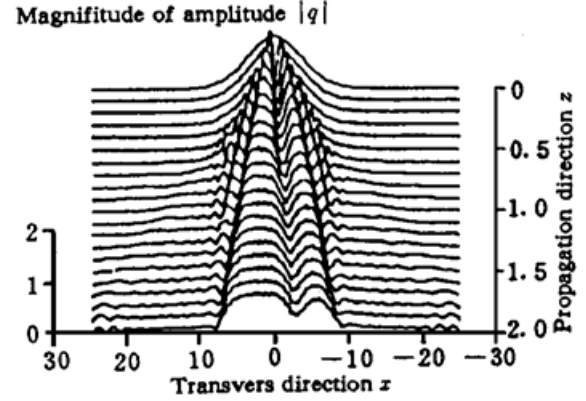


图 2  $\varphi = 2\pi/3$ , 灰孤子

Fig. 2  $\varphi = 2\pi/3$ , gray soliton

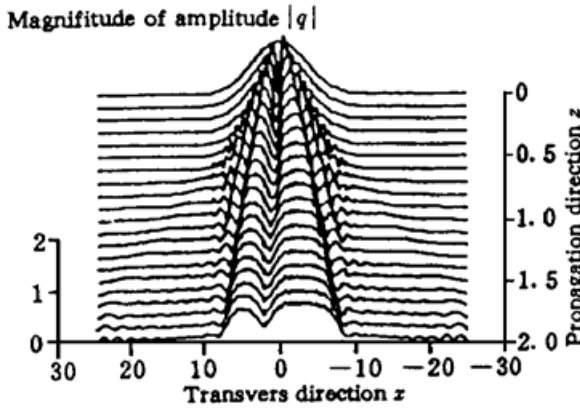


图 3  $\varphi = -2\pi/3$ , 灰孤子

Fig. 3  $\varphi = -2\pi/3$ , gray soliton

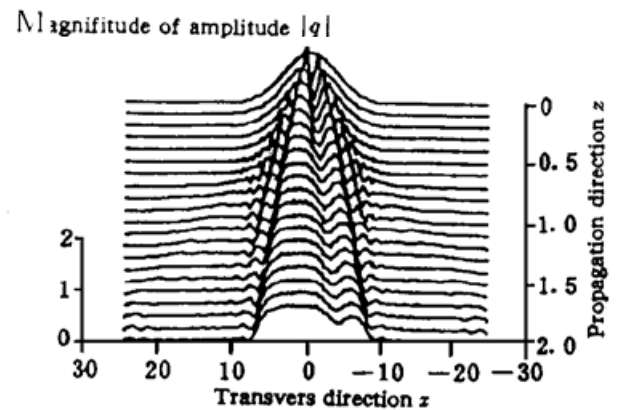


图 4  $\varphi = \pi/2$ , 灰孤子

Fig. 4  $\varphi = \pi/2$ , gray soliton

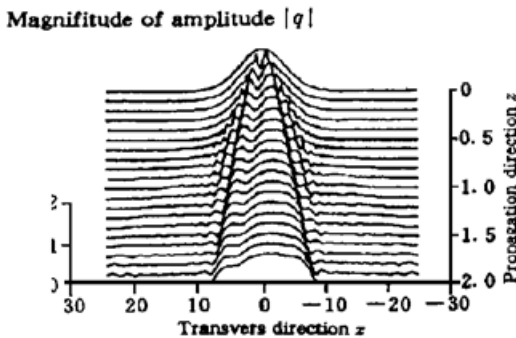


图 5  $\varphi = -\pi/2$ , 灰孤子

Fig. 5  $\varphi = -\pi/2$ , gray soliton

由图 1~ 5 可知: 奇相位跃变可以激发出单一的能量凹陷, 这就是暗空间光孤子; 由图 1, 图 2, 图 4 可以看出, 暗空间光孤子的能量凹陷逐渐变浅, 横向漂移逐渐变大, 这说明, 相位跃变越接近  $\pi$ , 激发出的孤子黑度越大, 横向速度越小; 图 1 显示出当相位越变为  $\pi$  时, 暗空间光孤子不发生横向漂移, 横向速度为 0, 能量凹陷最深, 成为黑孤子; 而由图 2 和图 3, 或图 4 和图 5 对比可知, 符号相反的相位跃变, 激发出的灰孤子的横向漂移方向相反, 即横向速度方向相反。

## 5 以高斯光束为背景的偶边界条件激发出的暗空间光孤子

采用形状接近基阶暗空间光孤子的凹陷

$$\epsilon(x)|_{z=0} = \{1 - \operatorname{sech}^2(x/x_0)\}^{1/2} \quad (12)$$

构成偶边界条件, 研究凹陷宽度  $x_0$  对暗空间光孤子激发的影响。

通过数值计算, 可以得到  $x = 0.5, 1, 2, 3$  的偶边界条件激发出的暗空间光孤子, 如图 6~9。

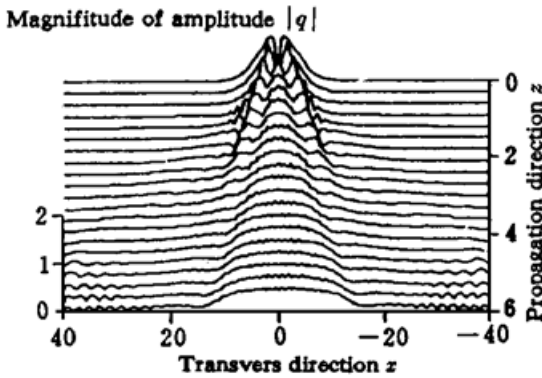


图 6  $x_0 = 0.5$ , 暗空间光孤子

Fig. 6  $x_0 = 0.5$ , dark spatial optical soliton

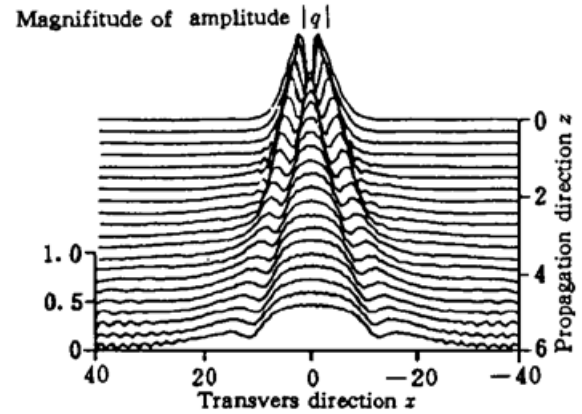


图 7  $x_0 = 1$ , 暗空间光孤子

Fig. 7  $x_0 = 1$ , dark spatial optical soliton

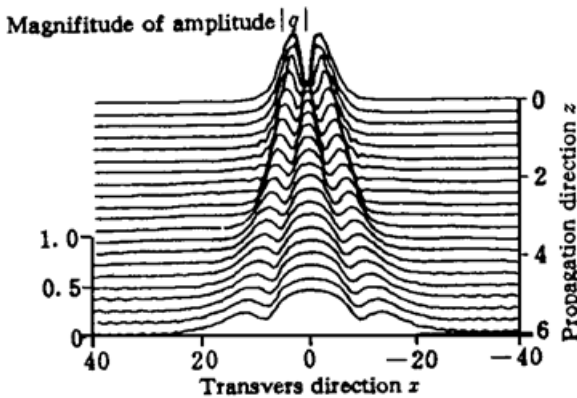


图 8  $x_0 = 2$ , 暗空间光孤子

Fig. 8  $x_0 = 2$ , dark spatial optical soliton

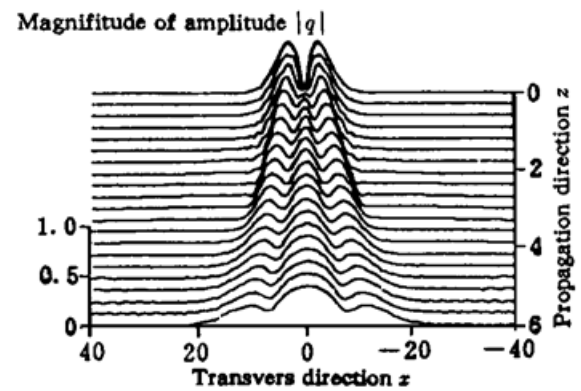


图 9  $x_0 = 3$ , 暗空间光孤子

Fig. 9  $x_0 = 3$ , dark spatial optical soliton

由图 6~9 可知:

(1) 初始在高斯光束中心有一个形状接近基阶暗空间光孤子的暗凹陷, 在传播中这个暗凹陷发生暗辐射, 从而分裂出两个暗空间光孤子。这两个孤子黑度相同, 横向速度大小相等、方向相反;

(2) 凹陷的宽度直接影响着激发暗空间光孤子的黑度和横向速度。凹陷越宽, 激发的孤子的黑度越大, 横向速度越小。这种结构激发出的暗孤子的数目总是偶数, 且都是灰孤子, 从不出现黑孤子, 保持偶对称性。

## 6 结 论

根据数值计算结果可知: 奇相位跃变可以激发出单个暗空间光孤子, 且相位跃变直接影响着暗空间光孤子的黑度和横向速度; 偶边界条件激发出偶数个成偶对称的暗空间光孤子, 且凹陷的宽度直接影响着暗空间光孤子的黑度和横向速度。

### 参 考 文 献

- 1 Pierre-Andre Belanger, Pierre Mathieu. Dark soliton in a Kerr defocusing medium. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(1) : 111
- 2 G. A. Swartzlander, Jr. D. R. Andersen, J. J. Regan *et al.*. Spatial dark soliton stripes and grids in self-defocusing materials. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**(12) : 1583
- 3 H. T. Tran. Stability of dark solitons: linear analysis. *Phys. Rev. A*, 1992, **46**(11) : 7319
- 4 G. S. McDonald, K. S. Syed, W. J. Firth. Dark spatial soliton break-up in the transverse plane. *Opt. Commun.*, 1993, **95**(4, 5, 6) : 281
- 5 S. Maneuf, R. Desailly, C. Froehly. Stable self-trapping of laser beams: observation in a nonlinear planar waveguide. *Opt. Commun.*, 1988, **65**(3) : 193
- 6 S. A. Gredeskul, Y. S. Kivshar, M. V. Yanouskaya. Dark-pulse soliton in nonlinear optical fibers. *Phys. Rev. A*, 1990, **41**(7) : 3994
- 7 V. E. Zakharov, A. B. Shabat. Interaction between solitons in stable medium. *Sov. Phys. JETP*, 1973, **37**(5) : 823

## Effect of Boundary Conditions on Dark Spatial Soliton in a Gaussian Light Beam

Lu Hong Xu Jiandong Hong Tao Li Chunfei

(The Department of Applied Physics of HIT, Harbin 150001)

**Abstract** This paper gives a brief introduction of the theory about dark spatial optical soliton, and analyses the effect of boundary condition on dark spatial optical soliton in a Gaussian light beam by means of numerical computation.

**Key words** numerical computation, boundary condition, Gaussian light beam, dark spatial optical soliton