

研究物体分数傅里叶变换的简单方法

华建文 刘立人 李国强

(中国科学院上海光机所 上海 201800)

提要 提供一种不用透镜观察分数傅里叶变换的方法。给出其理论依据、实验示例及实验比较。这种方法既能解决没有合适透镜的情形,又具操作简单、精度高、范围宽等特点。

关键词 傅里叶, 光学变换

1 引 言

分数傅里叶变换虽然是一个比较新的概念,但已有不少应用^[1~8]。它的最早定义由 Namias^[9]给出。后来 McBride^[10]等人又从纯数学角度作了一点补充证明,使其成为一个较完整的理论。1993 年 Mendlovic 和 Ozaktas^[11]把分数傅里叶变换引入光学领域,并采用渐变折射率介质(GRIN)光学理论给出了这一概念的光学定义,讨论了分数傅里叶的一些基本特性,如线性性、部分卷积、部分相关、乘法规则、微分规则、混合积、位移性质等。同时,他们给出了实现二分之一次傅里叶变换的透镜结构。随后, Lohmann^[12]采用 Wigner 函数定义了光学分数傅里叶变换并给出了任意分数值的傅里叶变换的单透镜及双透镜光学实现装置。此后,它成为信息光学中的一个热门话题。分数傅里叶变换可能是比较陌生的概念,这可以与幂函数类比来理解, $f(x) = x^n$ 表示一种变换, n 可以是整数也可以是分数。以往的所有分数傅里叶变换光学实现装置都少不了透镜,并且使用愈来愈多的透镜去实现分数傅里叶变换,使得装置愈来愈复杂。本文从另一个角度去研究分数傅里叶变换,即如何以简陋的设备和简单的手段来研究物体的分数傅里叶变换,提供一种新的研究分数傅里叶变换的方法:利用平面波照射的自由空间菲涅尔衍射来观察物体的分数傅里叶变换。此法不需用任何透镜,操作也简单。实验结果还发现这种方法观察分数傅里叶变换比使用透镜观察效果更好。

2 分数傅里叶变换的定义

Lohmann 把分数傅里叶变换的概念引入到信息光学中。他给出的分数傅里叶变换的定义为

$$u_p(x_1) = F^P[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \exp\left[\frac{j\pi(x^2 + x_1^2)}{\mathcal{N}_f \cdot \text{tg}\Phi}\right] \exp\left[\frac{-j2\pi x x_1}{\mathcal{N}_f \cdot \sin\Phi}\right] dx \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助项目。

其中 $u_0(x)$ 表示要变换的物体, $u_p(x_1)$ 表示它的分数傅里叶变换, 角度 ϕ 和分数 P 由等式 $\phi = P\pi/2$ 联系。从式(1)可见 $u_p(x_1)$ 不但与 ϕ 有关, 而且与 f_e 也有关。Lohmann 把 f_e 称为标准焦距。在分数傅里叶变换的级联系统中, 每一级的标准焦距必须相等。Lohmann 给出的, 实现方程(1)积分运算的光学装置见图1。其中, 透镜焦距 $f = f_e/\sin\phi$ 。

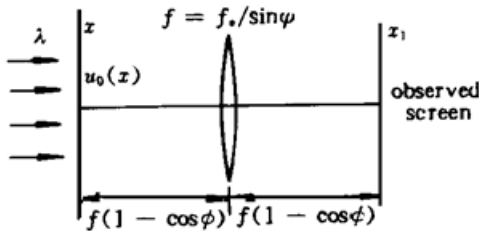


图1 单透镜分数傅里叶变换装置

Fig.1 The setup for performing fractional Fourier transform

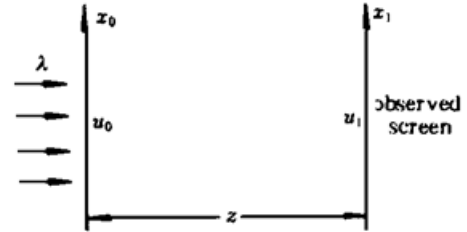


图2 自由空间衍射法观察分数傅里叶变换

Fig.2 Observation of fractional Fourier transform by diffraction through the free-space

3 分数傅里叶变换的无透镜观察法

使用如图2所示的自由空间衍射系统, 图中位于 x_0 平面的物体 $u_0(x)$ 以相干平面波照明, 在离物体距离为 z 的 x_1 平面上的菲涅尔衍射场场强 I 可用下式描述

$$I = |u_1(x_1)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0) \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda z}(x_0 - x_1)^2\right] dx_0 \right|^2 \quad (2)$$

上式中忽略了所有与分布无关的传播常数。

$$\text{令} \quad x_0 = x_{0e} \cos\phi \quad (3)$$

$$\text{和安排} \quad z = f_e \sin(2\phi)/2 \quad (4)$$

ϕ 和 f_e 就表示 Lohmann 所指的分数傅里叶变换的参数。将方程(3)及(4)代入(2), 则有

$$\begin{aligned} I = |u_1(x_1)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_{0e} \cos\phi) \exp\left[\frac{j\pi}{f_e \sin\phi} (x_{0e} - x_1/\cos\phi)^2\right] \cos\phi dx_{0e} \right|^2 \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_{0e} \cos\phi) \exp\left[\frac{j\pi}{f_e \sin\phi} (x_{0e}^2 + x_1^2)\right] \exp\left[\frac{-j\pi 2x_{0e} x_1}{f_e \sin\phi}\right] dx_{0e} \right|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

式中已忽略了因子 $|\cos\phi \exp(j\pi \phi x_1^2/f_e)|^2$ 。按照 Lohmann 的定义, 方程(5)显然是 $u_0(x_{0e} \cos\phi)$ 的分数傅里叶变换的强度表达式。从数学上来看, (5) 式中 $u_0(x_{0e} \cos\phi)$ 应理解为 $u_0(x_{0e})$ 缩小 $\cos\phi$ 倍(但是由于 $\cos\phi < 1$, 因而实际上是放大), 为了获得 $u_0(x_0)$ 在指定参数下的分数傅里叶变换, 应将其放大 $\cos\phi$ 倍(实际上是缩小), 即 $u_0(x_0) \rightarrow u_0\left[\frac{x_0}{\cos\phi}\right]$ 。在积分式中 $u_0\left[\frac{x_0}{\cos\phi}\right] \rightarrow u_0\left[\frac{x_0}{\cos\phi} \cos\phi\right] \rightarrow u_0(x_0)$ 。因而, 我们要观察物体 $u_0(x)$ 的, 参数为 ϕ 和 f_e 的分数傅里叶变换强度分布时, 可把物体 $u_0(x)$ 先缩成 $u_0(x/\cos\phi)$, 然后置于图2中的 x_0 平面上。在由方程(4)所规定的距离 z 处放一块观察屏, 观察屏上的图案就是所要的强度分布。例如, 要看图3(a)所示的物体在参数 $\phi = \pi/3$ 和 $f_e = 1150 \text{ mm}$ 的分数傅里叶变换结果, 我们先把该图片缩小到它原有尺寸的 $\cos(\pi/3)$ 倍, 然后在平面波照明下, 观察其后方 $z = f_e \sin(2\phi)/2 = 498 \text{ mm}$ 处的自由空间衍射图案。图3(b)为实验结果。

即使不预先缩小物体, 也可以用自由空间衍射来观察物体的分数傅里叶变换。令

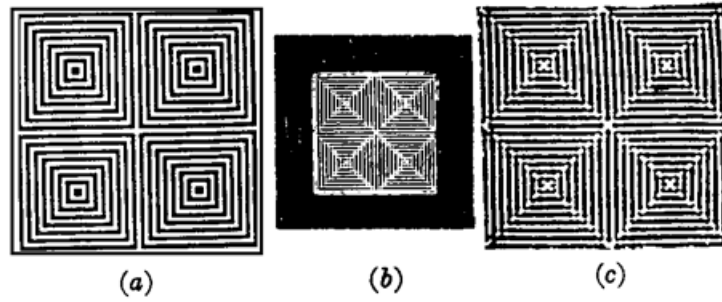


图 3 物体及其分数傅里叶变换

(a) 物体; (b) 缩小物体法观察结果; (c) 直接衍射观察结果

Fig. 3 Object and the observation result of its fractional Fourier transform

(a) object; (b) observation result of size-lessened object; (c) observation result of the original object

$$x_1 = x_{1c} / \cos\phi \tag{6}$$

$$z = f_c \operatorname{tg}\phi \tag{7}$$

并安排

由(2), (6)及(7)得

$$I = |u_1(x_{1c} / \cos\phi)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0) \exp\left[\frac{j\pi}{\mathcal{N}_c \operatorname{tg}\phi} (x_0^2 + x_{1c}^2) \right] \exp\left[\frac{-j\pi 2x_0 x_{1c}}{\mathcal{N}_c \sin\phi} \right] dx_0 \right|^2 \tag{8}$$

这里忽略了因子 $|\exp(j\pi \operatorname{tg}\phi x_{1c}^2 / \mathcal{N}_c)|^2$ 。方程(8)表明物体 $u_0(x)$ 在平行相干波照明下, 在其后方由方程(7)规定的距离 z 处所产生的自由空间衍射场强度分布如在尺度上缩小到它的 $\cos\phi$ 倍, 那么它就是原物体的分数傅里叶变换的强度分布。换句话说, 由一个物体产生的自由空间衍射图案就是该物体的分数傅里叶变换图案的放大。把图 3(a) 表示的图片不经任何处理直接放到图 2 所示的系统中进行观察, 安排 $z = f_c \operatorname{tg}\phi = 1992 \text{ mm}$, (f_c 及 ϕ 取值与上面相同, 即 $f_c = 1150 \text{ mm}$, $\phi = \pi/3$), 其结果是图 3(c)。从中可见它与图 3(b) 是一样的, 仅是尺寸上比图 3(b) 大了一倍, 这正好是尺度因子 $1/\cos(\pi/3)$ 。

图 4 是有透镜和无透镜两种方法观察二分之一大小的图 3(a) 所表示的图片的分数傅里叶变换的实验结果。在有透镜法中, 使用的透镜焦距 $f = 380 \text{ mm}$ 。在无透镜法中(采用上述的第二种方法), 使用的距离 $z = 1450 \text{ mm}$ 。从 $f = f_c / \sin\phi$ 和 $z = f_c \operatorname{tg}\phi$ 可知它们能完成一个同样参数的分数傅里叶变换, 这参数是 ϕ 值为 75.75° , f_c 为 368.308 mm 。图 4(a) 对应于无透镜法的实验结果, 图 4(b) 对应有透镜法。从实验结果看, 两者相比, 无透镜法得到的结果比有透镜法得到的结果目视效果更好, 因为透镜法得到的结果尺寸太小。另外, 在实验中发现调整无透镜观察法中的距离 z 比调整有透镜观察法中的距离(指物体

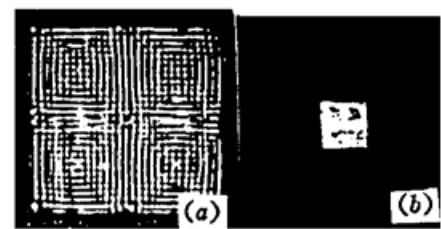


图 4 两种观察法观察同一物体的分数傅里叶变换的比较

(a) 无透镜法观察结果; (b) 有透镜法观察结果

Fig. 4 Comparison between the two methods to observe the fractional Fourier transform of a common object

(a) without lens; (b) with lens

及观察屏到透镜的距离)方便, 容易做到高精度调整, 因为它不涉及焦距的度量和起始位置等。这两者都影响综合观察精度。还有, 无透镜观察法可以简单地通过调整衍射距离 z 来观察任意的 ϕ 和任意的 f_c 的分数傅里叶变换, 而透镜观察法是用调整透镜焦距来满足 ϕ 与 f_c 之间的任意搭配的。要使一个透镜的焦距连续变化, 对于刚性透镜是不可能的。

4 结 论

无透镜空间衍射法观察分数傅里叶变换理论上是能解释的, 实践上是可行的, 方法上是简单的。它所能观察的分数傅里叶变换的范围宽(即它所能观察的分数傅里叶变换的两个参数 ϕ 及 f_c 是相对独立的, 不象在透镜法中两个参数必需受到 $f_c = f \sin\phi$ 的约束), 得到的结果精度高。对于没有合适透镜的场合, 本法还是一种必用的方法。

参 考 文 献

- 1 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, A. W. Lohmann. Graded index fibers, Wigner-distribution functions, and the fractional Fourier transform. *Appl. Opt.*, 1994, **33**: 6188~ 6193
- 2 M. Ozaktas, D. Mendlovic. Fractional Fourier transform and their optical implementation: II. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**: 2522~ 2531
- 3 M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic *et al.*. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**: 547 ~ 559
- 4 A. W. Lohmann, D. Mendlovic. Fractional Fourier transform: photonic implementation. *Appl. Opt.*, 1994, **33**: 7661~ 7664
- 5 G. Dorsch, A. W. Lohmann, Y. Bitran *et al.*. Chirp filtering in the fractional Fourier domain. *Appl. Opt.*, 1994, **33**: 7599~ 7602
- 6 Bernardo, O. D. D. Soares. Fractional Fourier transforms and imaging. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**: 2622~ 2626
- 7 M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic *et al.*. Space-variant filtering in fractional Fourier domains. *Inst. Phys. Conf. Ser.*, 1994, **139**: Part I—285~ 288
- 8 G. Dorsch, A. W. Lohmann. Fractional Fourier transform used for a lens-design problem. *Appl. Opt.*, 1995, **34**: 4111~ 4112
- 9 V. Namias. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. *J. Inst. Maths Appl.*, 1980, **25**: 241~ 265
- 10 C. McBride, F. H. Kerr. On Namia's fractional Fourier transforms. *IMA J. Appl. Math.*, 1987, **39**: 159~ 175
- 11 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas. Fractional Fourier transform and their optical implementation: I. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**: 1875~ 1880
- 12 A. W. Lohmann. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**: 2181~ 2186

Simple Method to Study the Fourier Transform of Object

Hua Jianwen Liu Liren Li Guoqiang

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

Abstract A method to observe the fractional Fourier transform of an object without lens is suggested and proved theoretically. It has the advantages of simple operation, high precision and wide range.

Key words Fourier, optical transform