均匀介质中麦克斯韦方程的无衍射解

程　亚　徐至展　韩申生　张文琦　陈建文
(中国科学院上海光机所　上海 201800)

提要　在均匀等离子体中麦克斯韦方程的一个严格积分解的基础上给出了若干不同形式的初始光波在其中演化的严格解，包括熟知的平面波解，著名的无衍射波解和三维空间中的球对称无衍射波解。作为一种群速度为零的光束，三维无衍射波的行为是令人惊讶的。

关键词　麦克斯韦方程，无衍射光束，傅里叶变换

1　引　言

出于研究超短光脉冲在均匀等离子体中传播的需要，研究如下形式的方程[1]

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\hat{a} = k_p^2 \hat{a} \tag{1}$$

其中 c 为真空中光速，k_p 为等离子体波矢。$\hat{a} = e\vec{A}_\perp/(m_e c^2)$ 是归一化的横向矢势。其中 e, m_e 分别为电子电荷及质量，$\vec{A}_\perp$ 为光波横向矢势。一般而言 k_p 是 $\hat{a}$ 的非线性函数。当 $|a|^2 \ll 1$，可近似认为 k_p 是常数。由于研究对象往往局限于稀薄等离子体，有 $k_p^2 \ll k_0^2$，k_0 为光波矢。一般而言，对任意的初始光脉冲，难以找到上式严格的演化解。上式对均匀介质均可运用。

本文首先给出上述问题的一个严格的积分形式的解，从而将一个二阶偏微分方程转变为作两次傅里叶变换。在此基础上，得出以上方程的若干严格解。虽然这些解是在色散介质中得出，但均可推广到真空或无色散均匀介质的情况。

2　均匀等离子体中麦克斯韦方程的积分解

(1) 式有众所周知的平面波解：

$$\hat{a} = a_c \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t) \tag{2}$$

a_c 为常数振幅。波矢及频率 $\vec{k}, \omega$ 满足色散关系

$$\begin{aligned} \omega^2/c^2 - k^2 &= k_p^2 \\ k^2 &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \end{aligned} \tag{3}$$

由于式(1)是线性方程，其解必然可以分解成各平面波的迭加。令初始光脉冲为 $\hat{a}_0$，其傅里叶变换为

$$\tilde{a}(k) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{a}_0 \cdot \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} \tag{4}$$

收稿日期：1996—03—29；收到修改稿日期：1996—04—26

函数 $\tilde{a}(k)$ 表征各平面波分量的强度。由于每个平面波均按色散关系(3) 独立传播,任意时刻 t 之后的脉冲形状应当由该时刻所有的平面波之和决定,即

$$a(t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{a}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\sqrt{k^2-k_p^2}\cdot ct)\,\mathrm{d}\vec{k}$$

$$=\mathrm{FT}^{-1}[\tilde{a}\exp(-i\sqrt{k^2-k_p^2}\cdot ct)] \tag{5}$$

(5) 式可适用于任意初始光脉冲 $\hat{a}_0$。为了验证(5) 式确实是(1) 式的解,可将(5) 式代回(1) 式,即得均匀介质中的色散关系(3) 式。同时,当 $t=0$, (5) 式即为(3) 式,即满足方程(1) 的初始条件。

3 不同形式的光波的演化

3.1 平面波解

(5) 式中如果 $\tilde{a}$ 中的 k_x, k_y, k_z 均取特定值 k_x', k_y', k_z',则有

$$a(t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{a}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\sqrt{k^2+k_p^2}\cdot ct)\,\mathrm{d}\vec{k}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k_x-k_x')\cdot\delta(k_y-k_y')\cdot\delta(k_z-k_z')\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\sqrt{k^2+k_p^2}\cdot ct)\,\mathrm{d}\vec{k}$$

$$=\exp(ik_x'\cdot x+ik_y'\cdot y+ik_z'\cdot z-i\omega_1 ct) \tag{6}$$

其中,$\omega_1^2=c^2(k_p^2+k_x'^2+k_y'^2+k_z'^2)$。显然,无论介质是否为真空,(6) 式即为平面波解。如果将 $\tilde{a}$ 取为 $\delta(k_x^2-k_x'^2)\cdot\delta(k_y^2-k_y'^2)\cdot\delta(k_z^2-k_z'^2)$,还可得到驻波解。

3.2 无衍射光束

如果(5) 式中 $\tilde{a}$ 内的 k_x, k_y, k_z 满足 $k_x^2+k_y^2=m^2, k_z=n$,其中 m, n 为常数,则取 $\tilde{a}=\delta(k_x^2+k_y^2-m^2)\cdot\delta(k_z-n)$,即有

$$a(t)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k_x^2+k_y^2-m^2)\cdot\delta(k_z-n)\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\sqrt{m^2+n^2+k_p^2}\cdot ct)\,\mathrm{d}\vec{k}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\exp(in\cdot z-i\sqrt{m^2+n^2+k_p^2}\cdot ct)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\sqrt{m^2-k_x^2}\cdot y)}{\sqrt{m^2-k_x^2}}\exp(ik_x\cdot x)\,\mathrm{d}k_x$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp(in\cdot z-i\omega_2\cdot t)\cdot\mathrm{FT}^{-1}\left[\frac{\cos(\sqrt{m^2-k_x^2}\cdot y)}{\sqrt{m^2-k_x^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}J_0(m\sqrt{x^2+y^2})\exp(in\cdot z-i\omega_2 t) \tag{7}$$

上式的计算用到了公式

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2|a|} \tag{8}$$

(7) 式最后的傅里叶变换可查阅数学手册中的傅里叶变换表[2]。其中 $J_0(m\sqrt{x^2+y^2})$ 为零阶贝塞尔函数,$\omega_2^2=c^2(m^2+n^2+k_p^2)$。上式即为著名的无衍射光束[3,4]。令 $t=0$,可得初始时刻的光波分布。光束沿 z 轴传播,理论上讲无论传输多远光束半径都不会改变。

3.3　三维空间无衍射光的解

如果(5) 式中 $\tilde{a}$ 内的 k_x, k_y, k_z 满足 $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = l^2$, 其中 l 为常数, 则取 $\tilde{a} = \delta(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - l^2)$, 即有

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - l^2)\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\sqrt{m^2 + n^2 + k_p^2}\cdot ct)\,\mathrm{d}\vec{k} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\sqrt{l^2 - k_x^2 - k_y^2}\cdot z\right)}{\sqrt{l^2 - k_x^2 - k_y^2}} \\
&\quad\cdot\exp(ik_x\cdot x)\exp(ik_y\cdot y)\exp(-i\sqrt{l^2 + k_p^2}\cdot ct)\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{FT}^{-1}\left[\frac{\cos\left(\sqrt{l^2 - k_x^2 - k_y^2}\cdot z\right)}{\sqrt{l^2 - k_x^2 - k_y^2}}\right]\exp(-i\omega_3\cdot t) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\left(l\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\exp(-i\omega_3 t)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

上式中 $\omega_3^2 = c^2(l^2 + k_p^2)$。有趣的是, 上式表明对于初始时刻以 $\frac{\sin(lr)}{r}$ 形式存在的光波, 以后任意时刻的空间光强分布均不会改变。其中 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$。也就是说, 这样分布的光其群速度为零。其实, 若将方程(1) 写在球坐标下, 则有

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial a}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 a}{\partial\phi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = k_p^2 a
\tag{10}
$$

不难验证, (9) 式是(10) 式的一个特解。因此这样的光波物理上确实是允许的。

由于麦克斯韦方程在洛仑兹变换下不变, 还可得到以任意群速度 v_g 运动的三维无衍射光束解:

$$
a(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\left(l\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}}\exp\left(-i\frac{\omega_3}{\gamma}t + i\frac{v_g}{c^2\gamma}z\right)
\tag{11}
$$

其中 γ 为相对论能量因子, v_g 是波包群速度, $z' = (z - v_g t)/\gamma$。

4　讨　论

首先注意三维空间无衍射光的解。如果实验上得到这样的光, 将可以观察到一个光团静止在空间不动, 这一点是超出人们常识的。一个在实验上实现该光束的最直接的方法是: 让频率相同, 波矢方向不同的各个平面驻波尽可能均匀对称地分布在球空间迭加, 驻波的波节在球心重合(这一方案可看作(9) 式中第一个等式在物理上的直接体现)。由于实验时只可能让有限个驻波迭加, 所以得到的光束不可能与(9) 式完全一致, 而只能近似相符。因此, 光束不会停留无限长的时间。但作为一个演示性实验, 应当可以看到光波包分布可以在一定时间内不变。

解 3.2, 3.3 的另一推论是: 为防止光波向空间某方向传输, 这个方向应当形成稳定的驻波。这样, 如果没有合适的边界约束, 真正无衍射的光波其总能量必定为无穷大。

其次, 值得指出, 由于只有为数不多的函数作傅里叶变换后能得到解析的形式, 因而有理由认为上述解大致上已经概括了方程(1) 的严格解。

参 考 文 献

1 E. Esarey, P. Sprangle, M. Pilloff *et al.*. Theory and group velocity of ultrashort, tightly focused laser pulses. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1995, **12**(9)：1695

2 数学手册, 第十一章. 傅里叶变换表. 北京：高等教育出版社, 568~571

3 J. Durnin, J. J. Miceli, J. H. Eberly. Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(19)：1499

4 J. Durnin. Exact solutions for nondiffracting beams I. The scalar theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1987, **4**(4)：651

Several Exact Solutions of Maxwell Equation in Uniform Plasma

Cheng Ya Xu Zhizhan Han Shensheng Zhang Wenqi Chen Jianwen

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

Abstract An exact integral solution of Maxwell equation in uniform plasmas is given in this paper. Several exact solutions, including plane wave solution, the famous nondiffracting beam solution and a new 3D nondiffracting solution, are presented by means of the integral solution.

Key words Maxwell equation, diffraction-free beam, Fourier transformation