

# 一种光学小波变换的改进

倪 明 蒋志平 陆启生

(国防科技大学应用物理系 长沙 410073)

**提要** 讨论了小波变换的光学实现方法,选择 Mexican-hat 小波对光学信号提取进行了数值模拟,发现 Mexican-hat 小波在信号提取方面的缺陷,在此基础上,提出了一种新的小波,并进行了数值模拟,证明了新小波的优点。

**关键词** 小波变换, Mexican-hat 小波, 光学信号提取

## 1 引 言

小波变换(wavelet transform)是一新兴的数学工具,并且还在迅速地发展之中。它通过对一在空间具有局部性质的函数作伸缩、平移(或再加入转动)来构成它的分析函数族—小波。小波函数的局部性质使得我们可以忽略远处的信息。这样就使我们可以同时对信号或场量在不同的空间位置上和不同的观察尺度上进行分析,使之具有不同于其他变换的特点。小波变换已被有效地应用于信号处理、图形编码、数值计算等领域,并在其他一些领域也受到广泛注意。通过改变小波的尺度因子,可以对信号进行多尺度处理<sup>[1]</sup>,提取的信号反映不同尺度下的特征。通过在空域中使用投影系统或在频域中进行空间滤波的方法<sup>[2]</sup>,小波变换在光学中得以实现。我们这里分析了小波的光学实现,根据各小波的特点,选择了 Mexican-hat 小波<sup>[3]</sup>,使小波滤波器简化为一滤光片,物理图像变得清晰,数值模拟变得简单,而且我们对 Mexican-hat 小波成功地进行了优化。

## 2 小波变换的光学实现

一维像  $s(x)$  的小波变换是一二维函数,定义为:

$$W_s(a, b) = \frac{1}{(a)^{1/2}} \int s(x) h\left[\frac{x-b}{a}\right] dx \quad (1)$$

即信号  $s(x)$  的小波变换是像  $s(x)$  和尺度窗  $h(x)$  的卷积。这个卷积操作在光学中可以采用一个光学投影系统的方法得以实现<sup>[2]</sup>。在频域中,一维小波变换的表达式可以写成

$$W_s(a, b) = (a)^{1/2} \int S(\mu) H(a\mu) \exp(-i2\pi b\mu) d\mu \quad (2)$$

其中,  $S(\mu)$  和  $H(a\mu)$  分别是  $s(x)$  和  $h(x)$  的傅里叶变换。方程(2)表明信号  $s(x)$  的小波变换是它的傅里叶频谱和小波的傅里叶变换的内积。它在光学处理系统中可以通过在频域进行空

间滤波的方法来实现。如图 1 所示,当小波滤波器的透过率函数  $t(x) = H(a\mu)$  时,输出就是输入信号  $s(x)$  的小波变换。

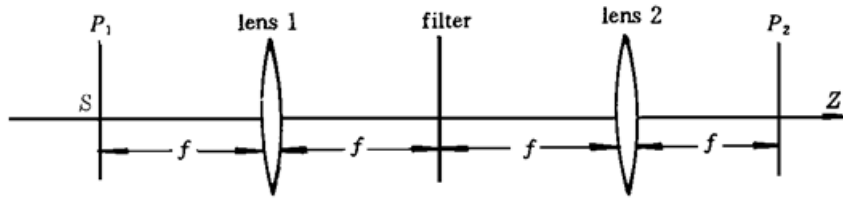


图 1 实现小波变换的光学装置

Fig. 1 Optical setup to realize the wavelet transform

上面的是一维时的情况,同理可类推二维时的情况。

### 3 Mexican-hat 小波及改进

在小波变换的光学实现中,通常运用的小波函数有 Haar 小波<sup>[4]</sup>, Mexican-hat 小波<sup>[3]</sup>, Morlet 小波<sup>[5]</sup>等。由上面的推导,我们知道要制作的小波滤波器的滤波函数  $t(x)$  就是小波函数的频谱。这样,如果某小波函数的频谱是一正的实函数,那么中间滤波器面就是一滤光片。当我们分析 Mexican-hat 小波时,发现该小波满足这一条件,即 Mexican-hat 小波函数的傅里叶变换是一正的实函数。为简单起见,我们先考虑一维时的情况。在一维的情况下, Mexican-hat 小波函数可以表示为<sup>[3]</sup>

$$h(x) = \left[ 1 - \left| \frac{x}{\sigma} \right|^2 \right] \exp \left[ - \frac{1}{2} \left| \frac{x}{\sigma} \right|^2 \right] \quad (3)$$

其中  $\sigma > 0$ , 尺度因子。经过傅里叶变换,其频谱

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-i2\pi\omega x/\lambda f) / dx$$

利用公式<sup>[8(a)]</sup>:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(bx) L_n(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (n!)^{-1} e^{-b^2/2} 2^{-n} \left[ H_n \left[ \frac{b}{\sqrt{2}} \right] \right]^2, (b > 0)$$

式中  $L_n(x^2)$ ,  $H_n \left[ \frac{b}{\sqrt{2}} \right]$  为  $n$  阶拉盖尔和厄密多项式,在此  $n = 1$

$$H(\omega) = 2 \sqrt{2\pi\sigma} \frac{\omega^2}{a^2} \exp \left[ - \frac{\omega^2}{a^2} \right], \text{ 其中 } \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2\pi\sigma}{\lambda f} \right]^2$$

这说明, Mexican-hat 小波函数的频谱确实是一正的实函数。我们选  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ ,  $f = 0.5 \text{ m}$ ,  $\sigma = 0.01 \text{ mm}$ , 这样  $a = 7.12 \text{ mm}$ 。下面所有计算取的参数值都是如此。于是,我们选滤光片的透过率函数

$$t(x) = 2.718 \frac{x^2}{a^2} \exp \left[ - \frac{x^2}{a^2} \right] \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (4)$$

2.718 是自然对数的底  $e$ , 以使透过率函数  $t(x)$  的最大值为 1。

利用这些,我们用图 1 所示的光路来提取光学信号。输入面  $P_1$  上在  $-0.2$  和  $-0.6 \text{ mm}$  之间入射一平面波,利用菲涅耳衍射积分公式算出的输出面的光强分布如图 2(a) 所示。利用小

波对光学信号进行处理, 目的是提取信号的边角。从图上看, 输出面上在 0.2 mm 和 0.6 mm 的地方光强确实增强, 而其他地方的光强则抑制为零。但也不难发现, 提取的信号是双峰结构, 并不太理想。在计算机数值模拟中, 当我们在频域挡一半光时, 即滤光片的透过率

$$t_1(x) = \begin{cases} 2.718 \frac{x^2}{a^2} \exp\left[-\frac{x^2}{a^2}\right], & x \in [0, +\infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (5)$$

这时, 我们处理的结果如图 2(b) 所示, 双峰结构变成了单峰结构, 处理的结果比图 2(a) 所示的结果要好。并且经过理论分析, 这是一种新小波在提取信号, 即函数  $t_1(x)$  的频谱是一新小波函数。下面我们来证明这个结论。

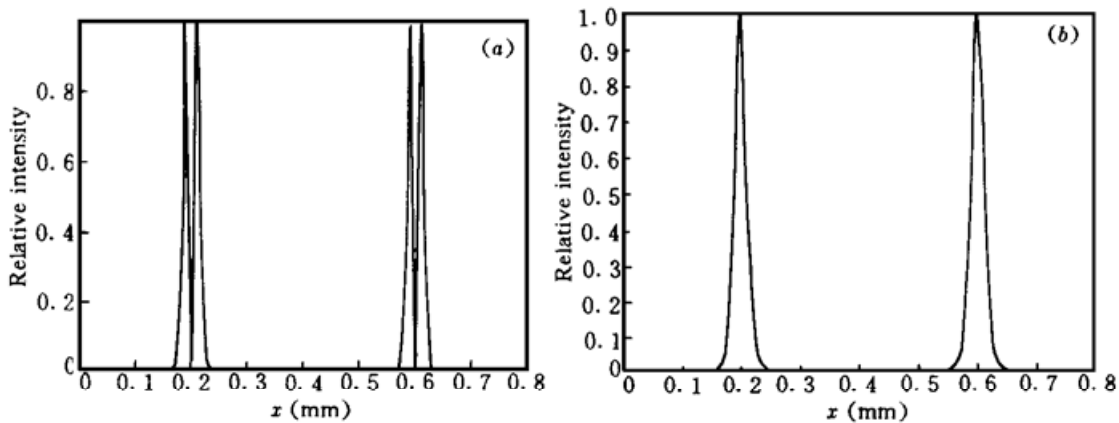


图 2 输入在 -0.2 ~ -0.6 mm 的地方是均匀分布时的输出面上的光强分布

(a) 透过率函数为  $t(x)$ ; (b) 透过率函数为  $t_1(x)$

Fig. 2 (a) The intensity distribution at the output plane when on the input plane there is a plane wave between -0.2 and -0.6 mm. The transmittance function  $t(x)$  is used; (b) The intensity distribution at the output plane when on the input plane there is a plane wave between -0.2 and -0.6 mm. The transmittance function  $t_1(x)$  is used

函数  $t_1(x)$  的频谱设为  $h_1(t)$ , 且

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} t_1(x) \exp[i2\pi xt/\mathcal{N}] dx \\ &= \int_0^{\infty} 2.718 \cdot \frac{x^2}{a^2} \exp\left[-\frac{x^2}{a^2}\right] \exp[i2\pi xt/\mathcal{N}] dx \\ &= \frac{2.718}{4\sqrt{2\pi\sigma}} h(t) + i \int_0^{\infty} 2.718 \cdot \frac{x^2}{a^2} \exp\left[-\frac{x^2}{a^2}\right] \exp[2\pi xt/\mathcal{N}] dx \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\sigma$  是尺度因子,  $h(t)$  是 Mexican-hat 小波函数,  $a = 7.12$  mm。因为  $\int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) dt = 0$ , 且当  $x \rightarrow 0$  时,  $h_1(t)$  的频谱的模方  $|h_1(x)|^2 = 0$ , 所以  $h_1(x)$  满足小波条件<sup>[6,7]</sup>, 是一新小波。如图 3 所示, 实线表示新小波函数的实部, 即 Mexican-hat 小波, 虚线表示它的虚部。利用公式<sup>[8(b)]</sup>

$$\int_0^{\infty} x^2 \exp(-p^2 x^2) \sin ax dx = \frac{a}{4p^4} + \frac{2p^2 - a^2}{8p^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k+1)!} \left(\frac{a}{p}\right)^{2k+1} \quad (a > 0)$$

(6) 式还可以写成

$$h_1(t) = \frac{2.718}{4\sqrt{2\pi\sigma}} h(t) + 2.718 \left[ \frac{\mathcal{N}t}{4\pi\sigma^2} + \frac{\sqrt{2}\mathcal{N}}{8\pi\sigma} \left[ 1 - \frac{t^2}{\sigma^2} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k+1)!} \left[ \sqrt{2} \frac{t}{\sigma} \right]^{2k+1} \right] i$$

以上推导可类推到二维时的情况。

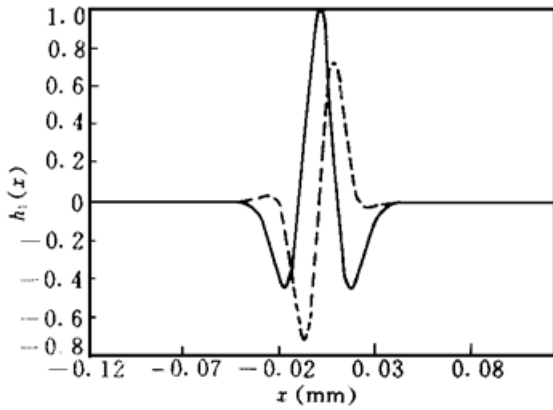


图 3 改进的小波  $h_1(x)$ 。实线表示这个函数的实部，虚线表示它的虚部

Fig. 3 The improved wavelet  $h_1(x)$ , the solid line expresses the real part of this function, and the dashed line expresses its image part. The value of  $h_1(x)$  has already been normalized

### 4 数值模拟

为了比较这两种小波提取信号的差异，我们就二维下的情况进行了数值模拟。在输入面上给一  $0.2 \times 0.2$  (mm) 的矩形光强，如图 4(a) 所示。首先，我们用 Mexican-hat 小波来提取信号。当我们选择透过率函数为式(4)时，提取的信号是原来信号的边(因式(4)是一维的，提取的信号也是一维的)，如图 4(b) 所示。当我们选择透过率函数

$$t(x, y) = \frac{(2.718)^2 x^2 y^2}{a^4} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right] \quad x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)$$

这时，提取的信号是原来信号的角，如图 4(c) 所示。为了同时提取信号的边和角，我们采用圆小波<sup>91</sup>

$$h(r) = \frac{1}{\sigma} \left[1 - \frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \quad r^2 = x^2 + y^2$$

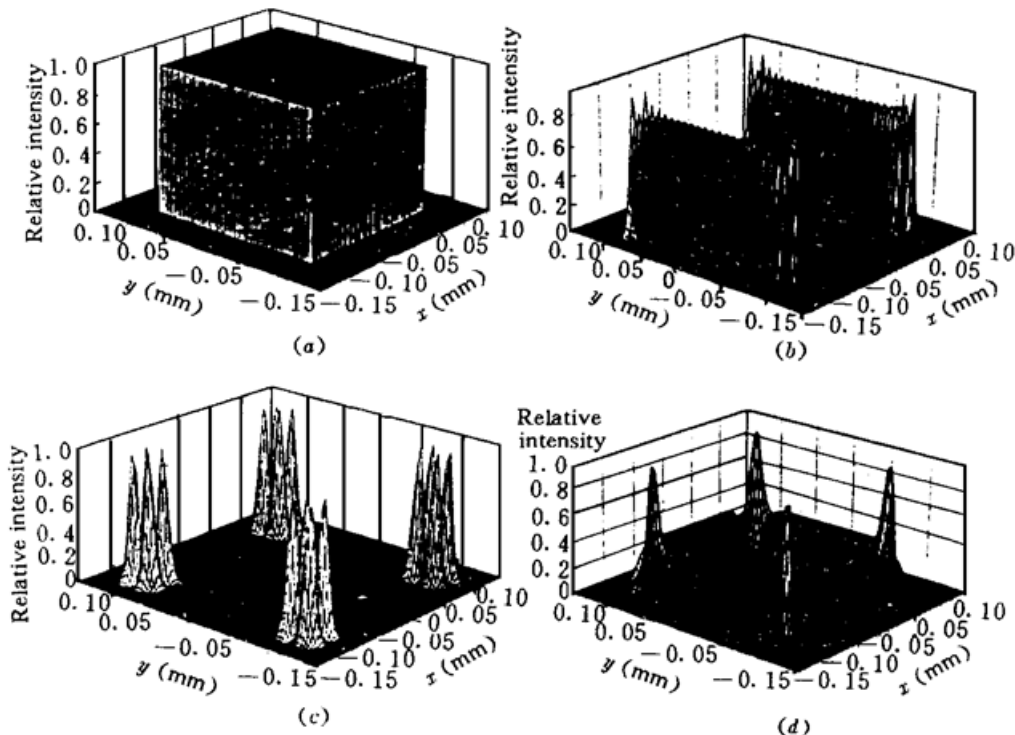


图 4 用 Mexican-hat 小波模拟边和角信号的提取

(a) 输入像; (b) ~ (d) 是输出像，频域滤光片的透过率函数分别为 (b)  $t(x)$ ; (c)  $t(x, y)$ ; (d)  $t(r)$

Fig. 4 Computer simulation of edge and corner extractions by Mexican-hat wavelet

(a) input image; (b) ~ (d) are the output images with the transmittance functions being (b)  $t(x)$ ; (c)  $t(x, y)$ ; and (d)  $t(r)$

这时滤光片的透过率函数

$$t(r) = \frac{2.718r^2}{a^2} \exp\left[-\frac{r^2}{a^2}\right] \quad r \in [0, +\infty), a = 7.12 \text{ mm}$$

信号的边和角同时被提取, 如图 4(d) 所示。

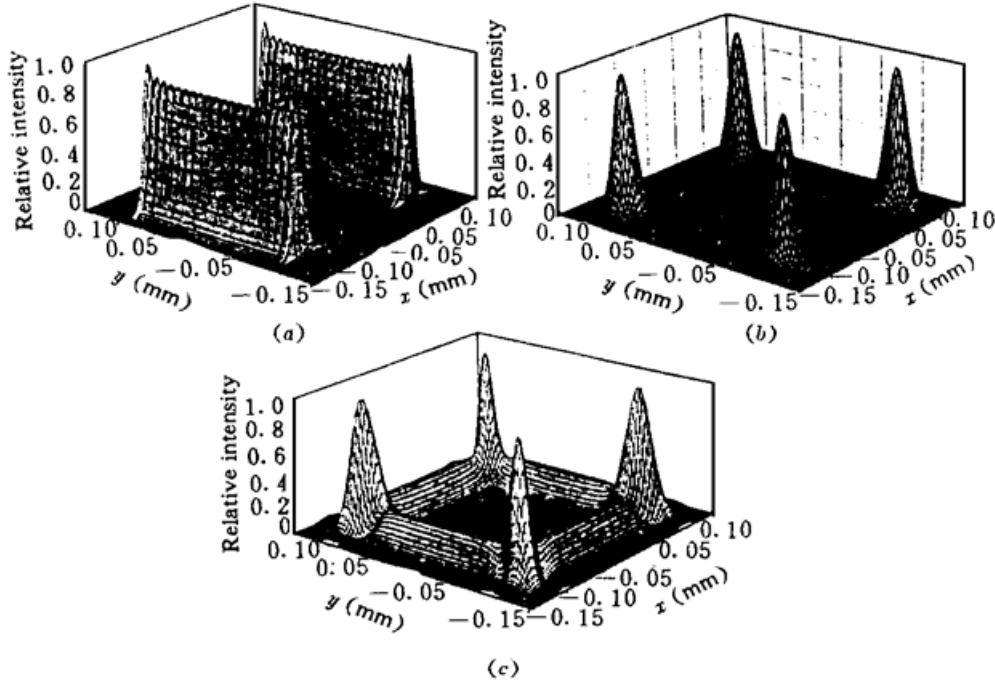


图 5 用改进的 Mexican-hat 小波模拟边和角信号的提取。(a) ~ (c) 是输出像, 频域滤光片的透过率函数分别为 (a)  $t_1(x)$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$ ; (b)  $t(x, y)$ ,  $x, y \in [0, +\infty)$ ; (c)  $t(r)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $x, y \in [0, +\infty)$

Fig. 5 Computer simulation of edge and corner extractions by the improved Mexican-hat wavelet, with the transmittance functions (a)  $t_1(x)$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$ ; (b)  $t(x, y)$ ,  $x, y \in [0, +\infty)$ ; and (c)  $t(r)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $x, y \in [0, +\infty)$

同时, 我们用改进的 Mexican-hat 小波对信号进行了提取。选择的透过率函数:  $t_1(x)$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$  提取信号的边, 如图 5(a) 所示;  $t(x, y)$ ,  $x, y \in [0, +\infty)$  提取信号的角, 如图 5(b) 所示,  $t(r)$ ,  $x, y \in [0, +\infty)$ , 提取信号的边和角, 如图 5(c) 所示。

## 5 结束语

经过理论推导和数值实验证明, Mexican-hat 小波和改进的 Mexican-hat 小波都能对信号进行有效的提取。改进的 Mexican-hat 小波函数, 虽然它在形式上比 Mexican-hat 小波函数更复杂, 但它的频谱却很简单, 更易于制作, 而且它对信号的提取比 Mexican-hat 小波要好。小波变换的光学实现以及实现的简易性, 可以预见, 光学小波变换必将得到广泛的应用。

## 参 考 文 献

- 1 S. G. Mallat. A theory for multifrequency signal decompositions: the wavelet representation. *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, 1989, 7: 674
- 2 Xiangyang Yang, Harold H. Szu, Yunlong Sheng *et al.*. Optical Haar wavelet transforms of binary images. *Opt. Eng.*, 1992, 31: 1846
- 3 S. J. Schiff. Resolving time-series structure with a controlled wavelet transform. *Opt. Eng.*, 1992, 31

- (11) : 2492
- 4 Yunlong Sheng, Danny Roberge, Harold H. Szu. Optical wavelet transform. *Opt. Eng.*, 1992, **31** : 1840
  - 5 J. Daugman. Complete discrete 2-D Gabor transforms by neural networks for image analysis and compression. *IEEE. Trans, Acoust, Speech, Sig. Proc. Assp.*, 1988, **36**(7) : 1169
  - 6 Harold Szu, Sheng Yunlong, Chen Jing. Wavelet transform as a bank of the matched filters. *Appl. Opt.*, 1992, **31** : 3267
  - 7 聂守平, 杨 罕, 李爱民等. 子波变换在光信息处理方面的应用. *应用光学*, 1994, **4** : 41
  - 8 I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. Table of Integrals, Series, and Products, ACADEMIC PRESS. New York London Toronto etc., 1980, (a) 846, (b) 495
  - 9 Caesar Saloma. Mirrors with point-spread functions that exhibit wavelet-related characteristics. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(19) : 1943

## Improvement of an Optical Wavelet Transform

Ni Ming Jiang Zhiping Lu Qisheng

(Department of Applied Physics, National University of Defense Technology, Changsha, 410073)

**Abstract** In this paper we discuss the realization of an optical wavelet transform. While choosing the Mexican-hat wavelet to extract an optical signal by computer simulation, we find the defect of this wavelet in signal extraction. Base on this finding, we put forward a new wavelet and its merits have been testified by computer simulations.

**Key words** wavelet transform, Mexican-hat wavelet, optical signal extraction