

# 傅里叶变换莫尔偏折术用于自动 测量气体温度场\*

钟金刚<sup>1</sup> 王 鸣<sup>1</sup> 李达成<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 南昌大学基础部 南昌 330029; <sup>2</sup> 清华大学精密仪器系 北京 100084)

**提要** 将傅里叶变换条纹位相分析方法用于莫尔偏折术, 实现了对轴对称温度场的高精度和自动化测量。

**关键词** 莫尔偏折术, 傅里叶变换, 温度场

## 1 引 言

莫尔偏折术自 1980 年被 O. Kafri<sup>[1]</sup> 提出以来, 利用莫尔偏折术描绘各种位相物体的报道已有许多<sup>[2,3]</sup>。在应用莫尔偏折术测量位相物体的过程中, 必须对莫尔条纹的偏离值作精确的测量。在已有的报道中, 都是采用直接测量方法, 甚至是手工测量, 测量精度有限, 并且测量过程繁琐。1983 年 M. Takeda 提出基于计算机数据处理技术的傅里叶变换条纹位相分析方法<sup>[4]</sup>, 通过对投影光栅图案的分析, 成功地实现了对三维面形的高精度和自动化测量。本文将采用这种傅里叶变换条纹位相分析方法, 分析莫尔偏折术中获得的莫尔条纹, 实现对轴对称温度场的高精度和自动化测量。

## 2 轴对称温度场的数学反演

基本的莫尔偏折术装置如图 1 所示。它由两块 Ronchi 光栅  $G_1$  和  $G_2$ 、照射光束  $C. B.$  及紧贴在  $G_2$  后面的观察屏  $S$  组成。 $G_1$  和  $G_2$  的栅线方向与  $z$  轴的夹角为  $\theta/2$  和  $-\theta/2$ 。 $d$  为 Talbot 成像距离。

当平行光通过  $G_1$  和  $G_2$  后, 在屏  $S$  形成的莫尔条纹为和  $z$  轴垂直的直条纹, 其条纹间距为

$$P' = \frac{P}{\sin(\theta/2)} \quad (1)$$

其中  $P$  为  $G_1$  和  $G_2$  的栅线间距。

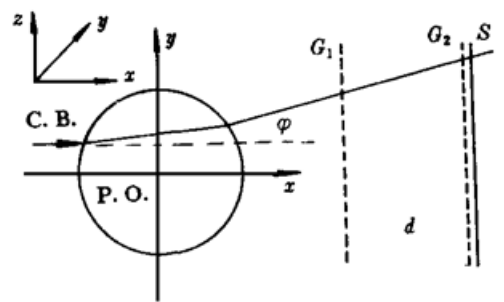


图 1 测量位相物体的基本莫尔偏折实验装置示意图

P. O.: 位相物体;  $G_1, G_2$ : 光栅; S: 成像屏

Fig. 1 Basic moiré deflectometer setup for phase objects measurement

P. O.: phase object;  $G_1, G_2$ : Ronchi gratings; S: mat screen

\* 江西省自然科学基金资助项目。

当照射光束通过一具有折射率梯度分布的位相物体后, 方向发生偏折, 导致屏 S 上形成的莫尔条纹发生畸变。光束在  $y$  方向的偏折角为

$$\mathcal{Q}(y, z) = \frac{1}{n_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial n(x, y, z)}{\partial y} \right| dx \quad (2)$$

其中  $n(x, y, z)$  为位相物体的折射率分布,  $n_\infty$  为周围环境的折射率。

如果位相物体的折射率具有轴对称分布, 即  $n(x, y, z) = n(r, z)$ , 且  $r^2 = x^2 + y^2$ , 则有

$$\mathcal{Q}(y, z) = \frac{2y}{n_\infty} \int_y^\infty \frac{\partial n(r, z)}{\partial r} \frac{dr}{(r^2 - y^2)^{1/2}} \quad (3)$$

积分方程(3)的 Abel 变换为

$$n(r, z) - n_\infty = - \frac{n_\infty}{\pi} \int_r^\infty \frac{\mathcal{Q}(y, z)}{(y^2 - r^2)^{1/2}} dy \quad (4)$$

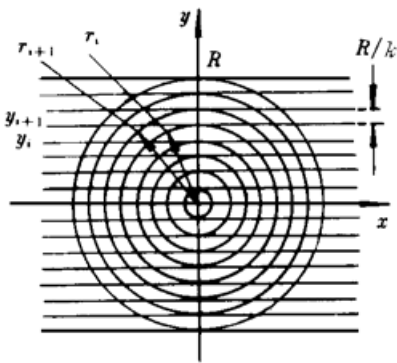


图 2 轴对称位相物体的某一截面的细分  
Fig. 2 Sectional dividing of an axisymmetric phase object (a fixed  $z$  value)

将位相物体区域分割成  $k$  个等间距  $\Delta r$  的同心环状区域, 通过位相物体的光束也分割成  $k$  个等间距的条形区域, 如图 2 所示。假设每个环形区域内  $\partial n/\partial r$  为常数, 则有<sup>[5]</sup>

$$n(r_l, z) - n_\infty = - \frac{n_\infty}{\pi} \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{Q}(y_i, z) B_{il} \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} B_{il} &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dy}{(y^2 - r_l^2)^{1/2}} \\ &= \ln \frac{(i+1) + [(i+1)^2 - l^2]^{1/2}}{i + (i^2 - l^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (6)$$

温度场与折射率的关系为

$$n(r, z) = \frac{\Omega}{n(r, z) - 1} \quad (7)$$

其中  $\Omega$  为一与气体有关的常数,  $\Omega = MPK/R$ ,  $M$  为气体分子量,  $P$  为压强,  $K$  为格拉德斯通-戴尔常数,  $R$  为气体常数。

同样对环境温度(加热的气体为空气, 环境气体也为空气) 有

$$T_\infty = \frac{\Omega}{n_\infty - 1} \quad (8)$$

由(7), (8)有

$$\frac{T(r, z)}{T_\infty} = \frac{n_\infty - 1}{n(r, z) - 1} \quad (9)$$

### 3 莫尔偏折图的傅里叶变换分析法

平行光通过位相物体后, 形成的畸变莫尔条纹分布函数  $g(y, z)$  可表示成空间相位调制信号:

$$g(y, z) = r(y, z) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \exp[j(2\pi n f_0 z) + j n \phi(y, z)] \quad (10)$$

其中  $r(y, z)$  表示照射光束通过位相物体后的光强分布,  $\phi(y, z)$  为莫尔条纹畸变引起的空间相位改变量,  $f_0 = 1/P'$ 。

$\Phi_{y,z}$  与莫尔条纹的空间偏离量  $h(y,z)$  之间的关系为

$$\Phi_{y,z} = \frac{2\pi}{p} h(y,z) \quad (11)$$

对光线的偏折角  $\alpha_{y,z}$  为

$$\alpha_{y,z} = \frac{\theta}{d} h(y,z) \quad (12)$$

式(11)代入式(12)得

$$\alpha_{y,z} = \frac{\theta p'}{2\pi d} \Phi_{y,z} \quad (13)$$

因此, 光线偏折角  $\alpha_{y,z}$  包含在这一相位改变值  $\Phi_{y,z}$  中。

将(10)式改写为

$$g(y,z) = \sum_{-\infty}^{\infty} q_n(y,z) \exp(j2\pi n f_0 z) \quad (14)$$

其中

$$q_n(y,z) = r(y,z) A_n \exp[jn\Phi_{y,z}] \quad (15)$$

对(14)式作一维快速傅里叶变换(固定  $y$ , 改变  $z$ ), 得频谱

$$G(f,y) = \sum_{-\infty}^{\infty} Q_n(f - nf_0, y) \quad (16)$$

对(16)式进行空间数字滤波, 选取  $n = 1$  项后, 进行逆傅里叶变换后得

$$g_1(y,z) = q_1(y,z) \exp(j2\pi f_0 z) \quad (17)$$

其中

$$q_1(y,z) = A_1 r(y,z) \exp[j\Phi_{y,z}] \quad (18)$$

从(17)式中可得

$$\Phi_{y,z} = \arctan \frac{\text{Im}[g_1(y,z)]}{\text{Re}[g_1(y,z)]} - 2\pi f_0 z \quad (19)$$

其中  $\text{Im}[\ ]$  和  $\text{Re}[\ ]$  分别表示对  $g_1(y,z)$  取虚部和实部运算。

(19)式得到的  $\Phi_{y,z}$  为畸变的莫尔条纹相对理想直条纹的位相改变量。但我们在实验中要得到严格的直条纹是不可能的, 因为它要求照射光为理想的平行光以及两光栅平面严格和入射光垂直。因此在没有位相物体时, 形成的莫尔条纹存在一初始相位值  $\Phi_0(y,z)$ 。其莫尔花样分布函数  $g_0(y,z)$  为

$$g_0(y,z) = r'(y,z) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(y,z) \exp[j2\pi n f_0 z + jn\Phi_0(y,z)] \quad (20)$$

同理, 对  $g_0(y,z)$  进行傅氏变换、数字滤波、逆傅氏变换后得

$$g_{01}(y,z) = A_1 r'(y,z) \exp(j2\pi f_0 z) \exp[j\Phi_0(y,z)] \quad (21)$$

将  $g_1(y,z)$  和  $g_{01}(y,z)$  的共轭相乘得

$$g_1(y,z) * g_{01}^*(y,z) = A_1^2 r(y,z) r'(y,z) \exp[j\Phi_{y,z} - j\Phi_0(y,z)] \quad (22)$$

再将上式取自然对数

$$\ln[g_1(y,z) * g_{01}^*(y,z)] = \ln[A_1^2 r(y,z) r'(y,z)] + j\Delta\Phi_{y,z} \quad (23)$$

其中

$$\Delta\Phi_{y,z} = \Phi_{y,z} - \Phi_0(y,z) \quad (24)$$

对(23)式取虚部得

$$\Delta\phi(y, z) = \text{Im}\{\ln[g_1(y, z) * g_{01}^*(y, z)]\} \tag{25}$$

那么光线的偏折角  $\alpha(y, z)$  为

$$\alpha(y, z) = \frac{\theta P'}{2\pi d} \Delta\phi(y, z) \tag{26}$$

由(26) 式得到  $\alpha(y, z)$  后, 根据前述的数学反演公式(4), (5), 可以求得折射率分布  $n(r, z)$ , 再利用(9) 式即可求得温度分布  $T(r, z)$ 。

### 4 实 验

实验装置如图 3 所示。8 mW He-Ne 激光经针孔滤波、扩束器扩束后, 形成平行光照射光束 C. B.,  $G_1$  和  $G_2$  的栅距都为 0.125 mm,  $d$  为 395 mm,  $P'$  为 3.0 mm。所测温度场为经一铜圆柱体加热的空气温度场, 铜圆柱体如图 4 所示, 直径为 27 mm, 高为 129 mm。所用 CCD 摄像机为 4 帧  $512 \times 512$  像素。

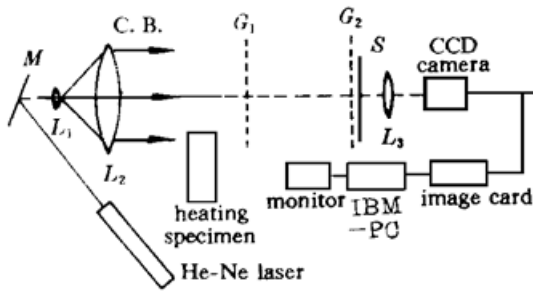


图 3 实验装置示意图

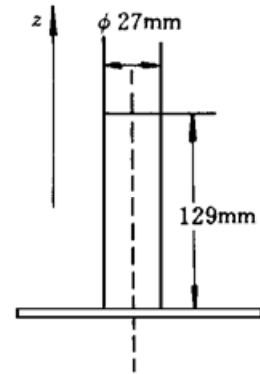


图 4 用作产生温度场的加热样品

Fig. 3 Schematic representation of the experiment

Fig. 4 Heating specimen used for producing temperature field

首先用 CCD 摄下圆柱体加热前的莫尔条纹, 经图像卡形成的数据图像存贮在其中的一帧中, 并记下环境温度  $T_\infty$ 。再将铜圆柱体加热, 待达到热平衡后, 在圆柱体上端获得一稳定的热空气温度场, 此时, 屏 S 上的莫尔条纹将发生畸变, 用 CCD 摄像机摄下此畸变的莫尔条纹, 经图像卡形成的数据图像存贮在另一帧中。存贮在图像卡两帧中的数据图像, 按前述方法进行计算机自动数据处理, 即可得到所测温度场的温度分布。

### 5 实验结果和结论

图 5 (a) 为加热前形成的莫尔条纹照片, (b) 为其对一固定  $y$  值的一维傅里叶变换频谱。

图 6 (a) 为形成稳定分布的温度场后得到的莫尔条纹照片, (b) 为其对一固定  $y$  值的一维傅里叶变换频谱。

图 7 (a) 为  $z = 10$  mm 时(即在圆柱体上端 10 mm 处), 在  $y$  方向的位相改变量  $\Delta\phi(y, z)$ , (b) 为与其对应的光线偏折角  $\alpha(y, z)$ 。图中横坐标为用像素数表示的  $y$  值, 像素数  $m_y = 255$  对应  $y$  的坐标原点, 512 个像素对应 40 mm。

图 8 表示由计算机得到的  $z = 10$  mm 处的温度径向分布。图中横坐标  $m_r$  为用像素数表示的半径  $r$  值, 512 个像素对应 40 mm。在实验中, 测得环境温度  $T_\infty = 301$  K, 圆柱体壁面温度

$T_s = 379\text{K}$ 。

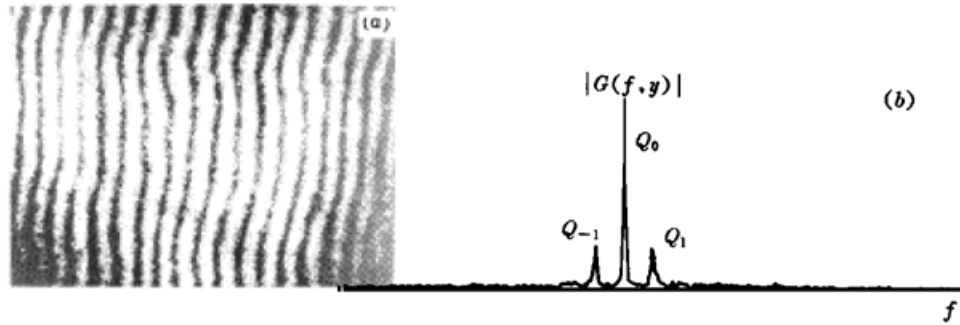


图 5

(a) 样品加热前的莫尔图案; (b) 加热前的莫尔图案的一维傅里叶谱(对一固定  $y$  值)

Fig. 5

(a) Moire pattern before heating; (b) Fourier spectrum of moire pattern before heating for a fixed  $y$  value

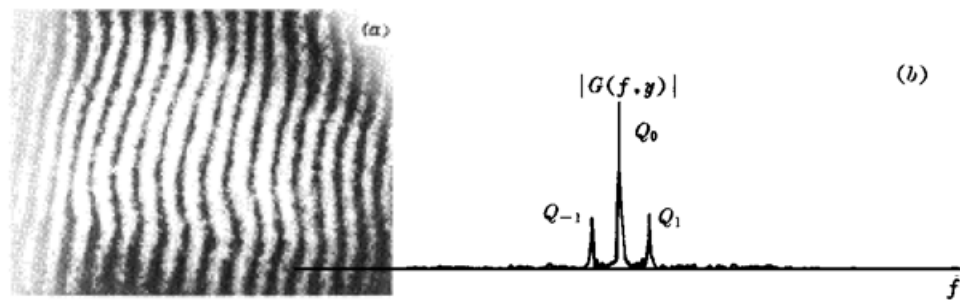


图 6

(a) 样品加热后的莫尔偏折图; (b) 莫尔偏折图的一维傅里叶谱(对一固定的  $y$  值)

Fig. 6

(a) Moire deflectograms after heating; (b) Fourier spectrum of moire deflectograms for a fixed  $y$  value

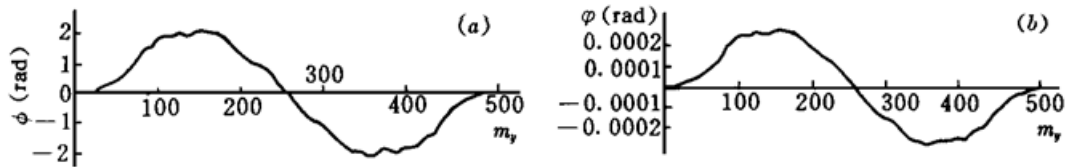


图 7

(a) 对一固定  $z$  值的条纹位相分布; (b) 对一固定  $z$  值的光束在  $y$  方向的偏折角

Fig. 7

(a) The phase distribution for a fixed  $z$  value; (b) The beam deflection angle in  $y$  direction for a fixed  $z$  value

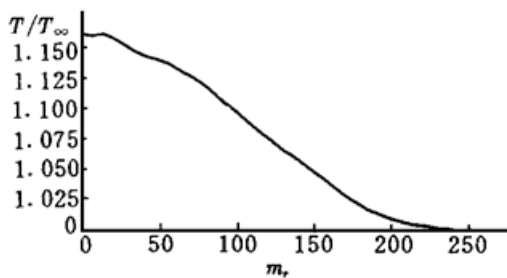


图 8 对一固定  $z$  值的温度径向分布

Fig. 8 Temperature variation vs  $r$  for a fixed  $z$  value

表 1 与用一热电偶直接测量结果的比较

Table 1 Comparison with temperatures measured directly by a thermocouple

$r$ (mm)	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0
$T_f$ (K)	350	342	322	306	301
$T'$ (K)	350	343	324	307	301

为了与图 8 表示的温度分布结果相比较, 我们直接用热电偶测量了一组温度值, 结果如表

1 所示, 其中  $T_f$  表示用傅里叶变换偏折术所得温度值,  $T'$  表示用热电偶直接测量温度值。从表中可看出, 两者温度值符合较好。

在利用莫尔偏折术对温度场的测量中, 测量精度主要受到莫尔条纹偏离值的测量误差和数值计算误差两方面的影响。由于傅里叶变换莫尔偏折术将莫尔条纹偏离值  $h$  的测量, 转化为位相差  $\Delta\phi$  的测量, 测量精度比一般的直接测量法要高得多。傅里叶变换方法的求解精度为  $1/10 \sim 1/30$  条纹间距, 而直接测量的精度为  $1 \sim 1/10$  条纹间距<sup>[6]</sup>。采用傅里叶变换方法的莫尔偏折术, 在实验数据采集方面, 比采用直接测量法的莫尔偏折术更方便, 而且所采集的数据点可以十分密集。我们在实验中, 每一行采集了 512 个点, 而采用直接测量法, 只能采集条纹的极大和极小值点位置数据, 实验中 40 mm 范围共 13 根条纹, 故最多可采集 26 个数据。这样使得求解阿贝方程的网格步长缩短了近 20 倍, 大大提高了数值计算的精度。

数据采集精度主要由 CCD 面阵的分辨率决定。在我们实验中, 512 个像素对应 40 mm, 那么每个像素分辨的距离为 0.078 mm, 也即  $1/38$  条纹间距。我们还可进一步增大 CCD 摄像机的放大倍数, 使每个像素的分辨距离更小, 当然每个像素的分辨距离最终受到衍射极限和 CCD 面阵实际尺寸的限制。同时, 傅里叶变换滤波对增大摄像头的放大倍数也有限制。因为放大倍数越大, 摄像头的口径一定, 获得的条纹数就越小, 其傅里叶变换谱中的一级谱和零级谱之间的距离也就越小, 给滤波操作带来困难。

从以上分析可知, 傅里叶变换莫尔偏折术比一般莫尔偏折术在测量精度上要高, 且可实现自动测量。

### 参 考 文 献

- 1 O. Kafri. Noncoherent methods for mapping phase objects. *Opt. Lett.*, 1980, **5**: 555~ 557
- 2 E. Keren, E. Bar-Ziv, I. Glatt *et al.*. Measurements of temperature distribution of flames by moire deflectometry. *Appl. Opt.*, 1981, **20**: 4263
- 3 J. Stricker, E. Keren, O. Kafri. Axisymmetric density field measurements by moire deflectometry. *AIAA Journal*, 1983, **21**: 1767~ 1769
- 4 M. Takeda, K. Mutoh. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes. *Appl. Opt.*, 1983, **22**: 3977~ 3982
- 5 朱德忠. 热物理激光测试技术. 北京: 科学出版社, 1990, 216~ 221
- 6 T. M. Kreis. Computer aided evaluation of fringe patterns. *Optics and Lasers in Engineering*, 1993, **19**: 221~ 240

## Fourier Transform Moire Deflectometry for the Automatic Measurement of Gas Temperature Field

Zhong Jinggang<sup>1</sup> Wang Ming<sup>1</sup> Li Dacheng<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>Basic Department, Nanchang University, Nanchang 330029;

<sup>2</sup>Dept. of Precision Instruments, Tsinghua University, Beijing 100084)

**Abstract** In this paper, Fourier transform evaluation of fringe phase is proposed for moire deflectometry. Using this method, high-precision and automatic measurement for the axisymmetric gas temperature field has been accomplished.

**Key words** moire deflectometry, Fourier transform, temperature field