

激光与 DNA 作用的非线性扰动方程的研究

邵耀椿 封国林 薛林宝

(扬州大学农学院基础部 扬州 225009)

提要 将激光与 DNA 分子系统相互作用的运动方程化成 Duffing 方程,进行了主共振、超谐波共振及两频激励组合共振的分析. 从而成功地解释了激光育种中存在的一些难以理解的现象.

关键词 激光, DNA, Duffing 方程, 两频激励, 共振

1 引 言

激光育种已取得了丰硕成果^[1],但尚存在着一些有待解释清楚的现象. 文献[2~5]报道了关于在激光生物学试验中,对水稻、番茄、菊花、链霉菌、蓖麻蚕等用 632.8 nm, 510.6 nm, 578.2 nm, 337.1 nm, 1.06 μm 及 1.06 μm + 0.53 μm 等激光波长处理,发现各种处理对各种生物都能引起生物效应. 文献[6]进行了不同激光波长处理的变异效果比较,指出用 He-Ne, CO₂, 钕玻璃及 N₂ 分子激光处理“广陆矮四号”水稻均有效果,其中最好的是 He-Ne 激光(632.8 nm),最差的是 N₂ 分子激光(337.1 nm). 文献[7]对蚕业激光应用进行了总结,蚕桑激光育成新品种多达 7 个. 同时指出,蚕育成品种的激光有效波长有 1.06 μm , 694.3 nm, 632.8 nm 及 488.0 nm 等六、七种. 同时还指出用复合波长 1.06 μm + 0.53 μm 处理,比使用单一波长作用强. 这些现象在激光育种界受到普遍关注,从量子观点来看,似乎有矛盾. 本文通过对激光与 DNA 分子相互作用的非线性方程——Duffing 方程研究,对它们进行了分析和解释.

我们曾根据 Yomosa 用基转子模型导出的 DNA 分子动力学方程^[8],建立了激光与 DNA 分子相互作用的运动方程^[9]

$$\ddot{\phi}_t + \gamma\dot{\phi} + b\sin\phi = E\cos\omega t \quad (1)$$

式中 ϕ 表示 DNA 分子两基转子相对于平衡位置的角移(扭转角), γ 为生物体内 DNA 所处水溶质环境中的阻尼系数, b 是与 DNA 链堆积能、碱基与相邻碱基相互作用及碱基对的局域相互作用常数相关的量, E 为激光电场对 DNA 中电荷和电偶极矩作用的电场力, ω 为激光频率, t 为时间. 在小角度时 $\sin\phi \approx \phi - \frac{1}{6}\phi^3$. 令 $x = \phi$, $\dot{x} = \dot{\phi}$, $x'' = \ddot{\phi}$, 则式(1)化成 Duffing 方程

$$x'' + \gamma x' + bx - \frac{b}{6}x^3 = E\cos\omega t \quad (2)$$

2 Duffing 方程的主共振

对于较小振幅, Duffing 方程中非线性项可以忽略. 式(2)就成为一普通线性受迫振动方程

$$x'' + \gamma x' + bx = E \cos \omega t \quad (3)$$

其解为^[10]

$$x = A \exp\left[-\frac{\gamma}{2}t\right] \cdot \cos(Pt + \phi) + B \cos(\omega t + \theta) \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} P = \sqrt{b - \frac{\gamma^2}{4}} \\ B = E / \sqrt{(b - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ \theta = \operatorname{tg}^{-1} \gamma \omega / (b - \omega^2) \end{cases} \quad (5)$$

系统的固有频率 $\omega_0 = \sqrt{b}$. 系统响应为式(4), 第一项为齐次方程解(自由振动项), 第二项为特解所组成. 第一项带有决定于初始条件的常数 A 与 ϕ , 对于正阻尼 $\gamma > 0$, 自由振动项随时间衰减, 所以称为暂态响应. 当时间足够大时稳定后所得响应称为稳态响应, 仅由特解构成. 因此稳态响应与激光激励项有相同频率, 但相位较激励项移动了 θ , θ 仅决定于阻尼及 ω_0 与 ω 的相对值, 与初始条件无关.

从式(5)可以看出, 当 $\omega \approx \omega_0$ 时, 也即式(4) 稳态响应频率与固有频率相等时, 响应振幅会很大, 称为主共振. 当振幅大时, 不能忽略式(2) 中的非线性项 x^3 , 此时可用多尺度方法求式(2) 的解^[11]. 把表示响应解的展开式考虑为多个自变量(或多个尺度) 的函数, 而不是单个自变量 t 的函数. 即把 x 看作 t 和 $\epsilon^n t$ 的函数, ϵ 为小量. 因为考虑主共振时 $\omega \approx \omega_0$, 令 $\omega = \omega_0 + \epsilon\sigma$, σ 为常数, 为便于求解, 将式(2) 改写为

$$x'' + \omega_0^2 x + 2\epsilon\beta x' - \epsilon\alpha x^3 = \epsilon e \cos[(\omega_0 + \epsilon\sigma)t] \quad (6)$$

其中 $\omega_0^2 = b$, $2\epsilon\beta = \gamma$, $\epsilon\alpha = \frac{b}{6}$, $\epsilon e = E$. 设 $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t \dots$, 则

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \epsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \dots \end{cases} \quad (7)$$

这里仅选取时间尺度为 T_0, T_1 , 则式(6) 的解用不同时间尺度表示为

$$x(t; \epsilon) = x_0(T_0, T) + \epsilon x_1(T_0 + T_1) + \dots \quad (8)$$

把式(8) 代入方程(6), 令等式两端的 ϵ^0 和 ϵ^1 的系数相等, 则得

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (9)$$

$$\text{及} \quad D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 + 2D_0 D_1 x_0 + 2\beta D_0 x_0 - \alpha x_0^3 = e \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (10)$$

式(9) 的通解可写为

$$x_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + A^*(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (11)$$

将式(11) 代入式(10), 且 $\cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)$ 用复数表示

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = & - [2i\omega_0(A' + \beta A) - 3\alpha A^2 A^*] \exp(i\omega_0 T_0) + \alpha A^3 \exp(3i\omega_0 T_0) \\ & + \frac{1}{2} e \exp[i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)] + cc \end{aligned} \quad (12)$$

式中 A^* 为 A 的共轭复数, A' 为 A 关于 T_1 的导数, cc 代表前面各项的共轭复数. 使式(12) 两边的 $\exp(i\omega_0 T_0)$ 的系数相等, 就得到关于 A 的方程

$$2i\omega_0(A' + \beta A) - 3\alpha A^2 A^* - \frac{1}{2}e \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad (13)$$

为便于解方程, 将 A 表示成极式

$$A = \frac{1}{2}C \exp(i\theta) \quad (14)$$

式中 C 与 θ 都是实函数, 设

$$\eta = \sigma T_1 - \theta \quad (15)$$

将式(14)代入式(11), 再将结果和式(15)代入式(8), 得稳态解的一次近似

$$x = C \cos(\omega t - \eta) + Q \quad (16)$$

其中 Q 为解的展开式的余项. 从式(16)可以看出响应以频率 ω 振动, 共振频率在 $\omega \approx \omega_0$ 处. 下面进一步分析, 将式(14)代入式(13), 分成实部和虚部, 并使实部、虚部分别相等, 得

$$\begin{cases} C' = -\beta C + \frac{e}{2\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \theta) \\ C\theta' = -\frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} C^3 - \frac{e}{2\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \theta) \end{cases} \quad (17)$$

把式(15)代入式(17), 可以把式(17)变换成一个自治系统(即不显含 T_1), 则

$$\begin{cases} C' = -\beta C + \frac{e}{2\omega_0} \sin\eta \\ C\eta' = \sigma C + \frac{3\alpha}{8\omega_0} C^3 + \frac{e}{2\omega_0} \cos\eta \end{cases} \quad (18)$$

对于稳态运动, C 与 η 是常数, 关于 T_1 导数为零, 即 $C' = \eta' = 0$, 则式(18)成为

$$\begin{cases} C\beta = \frac{e}{2\omega_0} \sin\eta \\ C\sigma + \frac{3\alpha C^3}{8\omega_0} = -\frac{e}{2\omega_0} \cos\eta \end{cases} \quad (19)$$

两边平方后相加, 得频率响应方程为

$$\beta^2 + \left[\sigma + \frac{3\alpha}{8\omega_0} C^2 \right]^2 = \frac{e^2}{4\omega_0^2 C^2} \quad (20)$$

响应幅值 C 与激励幅值 e 、频率差值 σ 以及非线性项系数有关, 当存在阻尼时, 这种关系呈非线性. 图 1 绘出了 C 与 σ 关系曲线. 频率响应曲线的弯曲导致了振幅的多值性, 从而导致了跳跃现象. 当 ω 远小于 ω_0 开始增加, 响应的幅值沿 AF 曲线慢慢增加直到 B , 在 B 点只要 ω 有微小增加, 就会突然从 B 点跳跃到 C 点. 随 ω 继续增加, 响应幅值沿曲线从 C 点慢慢减少到 D 点. 而当 ω 从远大于 ω_0 值开始单调减小时, 响应幅值沿 DCE 曲线慢慢增加. 在 E 点 ω 值的微小减少都会突然发生自发向下跳跃, 从 E 点到 F 点. ω 进一步减少, 响应幅值继续从 F 点减少到 A 点. 这表明了大的激励频率, 也即光

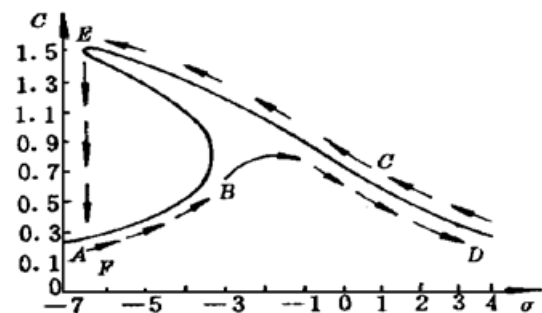


图 1 在 $\alpha = 1.0, e = 3.0, \beta = 0.1$ 时, 激光与 DNA 相互作用系统的主共振频率响应曲线

Fig. 1 The frequency-response curve for primary resonance of the laser-DNA interaction system.

Here $\alpha = 1.0,$

$e = 3.0, \beta = 0.1$

子能量大, 不一定引起大的响应. 从图 1 可以看到, 激励频率比 ω_0 小时, 在某一范围, 某些条件下, 引起响应反而大. 这在线性关系中是不能理解的, 所以产生这种现象是系统的非线性造成的.

3 Duffing 方程的超谐波共振

非线性系统的另一特征是次共振, 包括次谐波共振和超谐波共振, 这里仅讨论超谐波共振. 当 ω 远离 ω_0 时, 改式(2) 为

$$x'' + \omega_0^2 x + 2\epsilon\beta x' - \epsilon\alpha x^3 = E \cos \omega t \quad (21)$$

同理, 仍用多尺度方法求式(21)的近似解, 当 $3\omega = \omega_0 + \epsilon\sigma$ 时, 其响应的一次近似为

$$x = C \cos(3\omega t - \eta) + 2d \cos \omega t + Q \quad (22)$$

式中 C 与 η 为常数, $d = \frac{1}{2}E(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}$. 尽管存在阻尼, 在 $\omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$ 时, 其自由振动项(即第一项)并不衰减到零. 非线性性质调整了自由振动项共振频率在 $\omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$ 处. 解得其频率响应方程为

$$\beta^2 + \left[\sigma + 3 \frac{\alpha d}{\omega_0} + \frac{3\alpha C^2}{8\omega_0} \right]^2 = \frac{\alpha^2 d^6}{\omega_0^2 C^2} \quad (23)$$

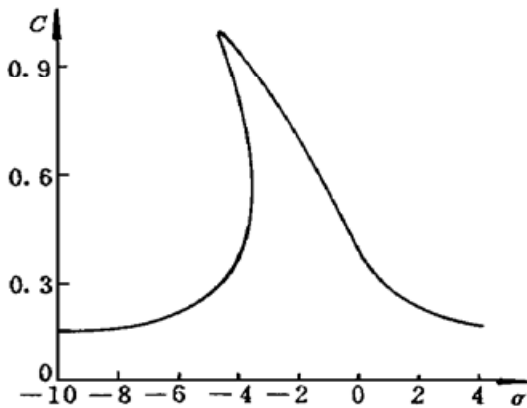


图 2 在 $\alpha = 1.0, d = 1.0, \beta = 0.5$ 时, 激光与 DNA 相互作用系统的超谐波共振频率响应曲线

Fig. 2 The frequency-response curve for superharmonic resonance of the laser-DNA interaction system. Here $\alpha = 1.0, d = 1.0, \beta = 0.5$

在 $\omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$ 附近, 响应幅值与频率差值 σ 的关系如图 2. 从图中可以看出, $\omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$ 时, 也能引起共振, 称为超谐波共振. 说明激励频率小于系统的固有频率, 也能引起系统的共振, 是非线性带来的结果.

DNA 吸收峰 260 nm 左右. 在 190~ 280 nm 均有较大的吸收^[12]. 文献[7]指出, 激光育种使用波长从 488.0 nm 到 1.06 μm 都有效果. 原因是由于系统的非线性, 存在超谐波共振, 使波长大于 260 nm 也有可能产生较大的响应. 如红宝石激光波长 694.3 nm, 虽然不会发生主共振, 但 3ω 相当于 $\lambda/3 \approx 231.4$ nm 接近于 260 nm, 会产生超谐波共振. 对于文献[6]所提到 He-Ne 激光(632.8 nm)效果好, N_2 分子激光(337.1 nm)效果差. 这是因为 632.8 nm 三分之一为 211 nm, 在 190~ 280 nm 有较大吸收的范围内, 而 337.1 nm 及其三分之一却不在 190~ 280 nm 范围内, 因此自然前者响应大些, 后者响应小些. 由于非线性和阻尼存在, 使引起响应的频率(或波长)范围变大, 即使没有主共振或次共振, 在一定激光频率范围, 可能还是有响应, 只是小些罢了.

4 两频激励共振

当用两频率组合与 DNA 分子系统相互作用时, 式(2)改写为

$$x'' + \omega_0^2 x + 2\epsilon\beta x' - \epsilon\alpha x^3 = E_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (24)$$

设 $\omega_2 > \omega_1$, 仍用多尺度方法解得, 其通解可写为

$$x = A \exp(i\omega_0 t) + B_1 \exp(i\omega_1 t) + B_2 \exp(i\omega_2 t) + Q \quad (25)$$

其中

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} C \exp(i\theta) \\ B_1 = \frac{1}{2} E_1 (\omega_0^2 - \omega_1^2)^{-1} \exp(i\theta_1) \\ B_2 = \frac{1}{2} E_2 (\omega_0^2 - \omega_2^2)^{-1} \exp(i\theta_2) \end{cases} \quad (26)$$

其中 C, θ 是实数. 结合前面分析可知, 系统除了能产生主共振 $\omega_h \approx \omega_0$, 以及次共振(次谐波共振和超谐波共振) $\omega_h \approx \frac{1}{3}\omega_0, \omega_h \approx 3\omega_0$ 外, 并且在 $\omega_0 \approx |\pm 2\omega_h \pm \omega_m|$ 或 $\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\omega_h \pm \omega_m)$ 时 ($n = 1, 2$ 和 $m = 1, 2$), 自由振动项也不消失, 也能产生共振, 称组合共振^[13]. 对于两频激励, 可以同时存在超谐波共振和组合共振, 但至多同时存在两种共振. 因此复合激励频率若选择恰当, 就能获得较强的效果. 对于文献[7]所提到的复合处理效果好, 能得到合理解释: 设 $\lambda_2 = 530 \text{ nm}$, $\lambda_1 = 1.06 \mu\text{m}$, 则 $\omega_2 + 2\omega_1$ 相当于 $\lambda^1 \approx 265 \text{ nm}$, 即为 $\omega_2 + 2\omega_1 \approx \omega_0$, 正好发生组合共振. 相比之下, 单一波长 530 nm 或 $1.064 \mu\text{m}$ 响应情况就差了.

5 结 语

由于生物体系统为非线性系统, 因此要研究激光育种的机理, 必须运用非线性的理论, 只有这样, 才能合理地解释通常线性理论不易解释清楚的现象. 通过对激光与 DNA 分子系统相互作用的 Duffing 方程研究, 可知:

(1) 由于阻尼项和非线性项存在, 会发生主共振和超谐波共振等. 使得发生共振响应的激励频谱较宽, 而且在激励频率远低于固有频率情况下, 也可能发生共振响应.

(2) 两频激励研究表明, 两频率激光复合处理能引起主共振、次共振及组合共振, 并且有可能同时存在两种共振, 因此使得激光育种效果好. 尤其选择了恰当频率的激光复合处理效果就特强.

参 考 文 献

- 1 万贤国. 我国植物激光诱变育种的概况. 激光生物学, 1996, 5(3): 865~ 869
- 2 陈芳远, 易小平, 杨华德 等. 不同波长的激光对水稻胚芽中可溶性蛋白质及同工酶的作用. 激光生物学, 1992, 1(2): 49~ 54
- 3 Shao Yaochun, Li Huiqing, Jin Baimou *et al.*. Experimental study of the biological effect of He-Ne laser and red fluorescent light on plants. *Chinese Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 1989, 8(6): 535 ~ 541
- 4 吴振倡, 王凤仙, 石宝驹 等. 龟裂链霉菌高产株激光辐照的研究. 中国激光, 1993, A20(8): 630~ 632
- 5 张文珍, 张谓滨, 蒲继雄 等. 激光照射对蓖麻蚕酯酶同工酶的影响. 激光生物学, 1992, 1(4): 151~ 153
- 6 万贤国, 庞伯良, 朱校奇. 激光及其与 γ 射线复合处理水稻干种子提高诱变效果的研究. 激光生物学, 1993, 2(1): 196~ 198
- 7 陈震古. 中国蚕业激光应用和进展. 激光生物学, 1994, 3(1): 414~ 422
- 8 Yomosa S.. Solitary excitations in deoxyribonucleic acid (DNA) double helices. *Phys. Rev. A*, 1984, 30: 474~ 480

- 9 邵耀椿, 封国林. 激光频率对 DNA 分子混沌态影响的研究. 红外与毫米波学报, 1995, **14**(6) : 456~460
- 10 F. S. 克劳福德 著; 卢鹤绂 等译. 波动学(中译本). 北京: 科技出版社, 1981, 122~ 137
- 11 A. H. 奈弗, D. T. 穆克. 非线性振动(中译本). 北京: 科技出版社, 1990, 61~ 64
- 12 曹恩华. 激光对 DNA 的作用. 激光生物学, 1993, **2**(3) : 289~ 295
- 13 Yamamoto T., Yasuda K., Nakamura T.. Combination oscillations in a nonlinear vibratory system with one degree of freedom. *Bull. JSME*, 1974, **17** : 560~ 568

Study on Nonlinear Vibratory Equation of Laser-DNA Interaction

Shao Yaochun Feng Guolin Xue Linbao

Department of Basic Science, The Agricultural College of Yangzhou University, Yangzhou 225009)

Abstract In this paper, the dynamic equation of laser-DNA interaction turns into Duffing equation (DE), then the solution of DE is obtained by the analysis of primary resonance, superharmonic resonance and combination resonance of two-frequency excitation. And therefore some incomprehensible phenomena in the laser breeding are successfully explained.

Key words laser, DNA, Duffing equation, two-frequency excitation, resonance