

# 分数傅里叶变换产生分数泰伯效应\*

华建文 刘立人

(中国科学院上海光机所 上海 201800)

**提要** 讨论了如何使用分数傅里叶变换来产生分数泰伯效应,导出了要产生这种双重变换的光学条件,变换后的周期、变换比例因子和级联运算法则,并进行了实验验证。这种双重变换有助于光学系统的设计、分析和计算。最后给出了应用实例。

**关键词** 光学变换,傅里叶变换,泰伯效应

## 1 引 言

分数傅里叶变换的概念是 Namias<sup>[1]</sup>首先提出的。后来由 McBride 和 Kerr<sup>[2]</sup>把它发展成一个较为完整的数学理论。它是傅里叶变换的全族。后来, Lohmann<sup>[3]</sup>在分析 Wigner 函数的基础上建立了光学领域中的分数傅里叶变换,并给出了光学实现的两种方案。Mendlovic 和 Ozaktas<sup>[4,5]</sup>研究了分数傅里叶变换的某些特性以及在光纤中的光学实现。文献[6~11]报道了一些分数傅里叶变换的应用。泰伯效应是光栅在相干光照明下在自由空间中某些特定的距离  $Z$  处自成像的现象。分数泰伯效应或称分数泰伯自成像是指这种成像过程发生在  $Z$  的分数距离上,如  $Z/2$  处,  $Z/3$  处等等。关于它的基本理论及许多应用的回顾可在文献[12]及[13]中找到。本文主要研究如何利用分数傅里叶变换使光栅产生分数泰伯像,或者说如何使分数傅里叶变换和分数泰伯自成像同时发生。这两种过程同时发生有一定的实用意义。利用这双重的分数变换(自成像也可看作一种变换)有助于一些光学系统的设计和分析,也有助于光路级联计算的简化。我们把它用于位相物体观察系统的光学设计,得到的装置比波面成像剪切干涉系统简单,尺寸又小。而且还能满足观察不同大小物体的要求。

## 2 分数泰伯效应和分数傅里叶变换

泰伯效应是一相干波照明一光栅,在自由空间中距光栅的某些特定的平面上能出现一些准确泰伯像和更多的分数泰伯像<sup>[13]</sup>。一块周期为  $T$ , 开口比为  $h$  的朗奇光栅可用下式描述

$$g(x, y) = \text{rect}(x/h) * \sum_n \delta(x - nT) \quad (1)$$

符号  $*$  表示卷积。用单色平面波照明光栅,其菲涅耳衍射场在光栅后方自由空间中传播,在离光栅距离为  $Z$  的平面上,光强分布为<sup>[13]</sup>

\* 国家自然科学基金资助项目。

$$|e(x, y)|^2 = |g(x, y) * \exp(j\pi x^2/\lambda Z)|^2 = |\text{rect}(x/h) * L(x : \alpha/\beta)|^2 \quad (2)$$

这里略去了所有的常数因子。在距离

$$Z = \frac{\alpha}{\beta} \frac{T^2}{\lambda} \quad (3)$$

处, 如果  $\alpha/\beta$  是一个整数, 则  $L(x : \alpha/\beta)$  将就是  $\sum_n \delta(x - nT)$ , 这时  $|e(x, y)|^2$  就是光栅  $g(x, y)$  的准确像。如果  $\alpha$  及  $\beta$  都是大于 1 的整数且  $\alpha/\beta$  是一个不能再约分的分数, 则方程式(2) 表示的  $|e(x, y)|^2$  将是光栅的分数泰伯像。这些分数泰伯像的周期为  $T/\beta$ , 同时还可能伴有一横向位移。其详细的叙述可见文献[13]。

光学分数傅里叶变换由 Lohmann<sup>[3]</sup> 给出。图 1 中  $g_0(x_0)$  是待变换的物体,  $g_1(x_1)$  表示  $g_0(x_0)$  的

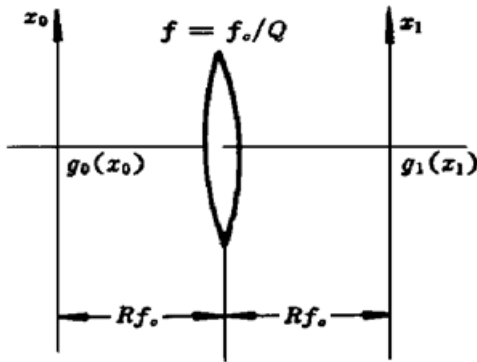


图 1 分数傅里叶变换装置

Fig. 1 Fractional Fourier transform setup

$$Q = \sin\phi, R = \text{tg}(\phi/2)$$

分数傅里叶变换。Lohmann 给出的定义为

$$g_1(x_1) = F^p[g_0(x_0)] = \int g_0(x_0) \exp[j\pi(x_0^2 + x_1^2)/(\mathcal{M}_c \text{tg}\phi)] \exp[-j2\pi x_1 x_0/(\mathcal{M}_c \sin\phi)] dx_0 \quad (4)$$

这里

$$f_c = fQ \quad (5)$$

$f$  是透镜焦距,  $Q$  为  $\sin\phi$ 。其中  $\phi$  和分数值  $P$  是通过下式联系的:

$$\phi = P\pi/2 \quad (6)$$

### 3 分数傅里叶变换产生分数泰伯效应

首先考虑单个透镜系统中的分数傅里叶变换产生的分数泰伯效应。分数傅里叶变换的定义为方程式(4)。整理后得到其光强分布为

$$|g_1(x_1)|^2 = \left| \int g_0(x_0) \exp[j\pi(x_0 - x_1/\cos\phi)^2/(\mathcal{M}_c \text{tg}\phi)] dx_0 \right|^2 \quad (7)$$

如果令

$$f_c \text{tg}\phi = Z_c \quad (8)$$

和

$$x_1/\cos\phi = x_{1c} \quad (9)$$

那么方程(7)可重写为

$$|g_1(x_1)|^2 = |[g_0(x_{1c}) * \exp(j\pi x_{1c}^2/(\lambda Z_c))]|^2 \quad (10)$$

把方程(10)与方程(2)比较就可见它们在形式上是等效的。如果  $g_0(x_0)$  是一块周期为  $T$  的朗奇光栅, 并且

$$Z_c = \frac{\alpha}{\beta} \frac{T^2}{\lambda} \quad (11)$$

那么在观察平面  $x_{1c}$  上就会形成周期为  $T/\beta$  的泰伯像。由于实际观察平面是  $x_1$ , 因而它还有一比例因子

$$M = \cos\phi \quad (12)$$

所以像的实际周期为  $\cos\phi T/\beta$ 。把方程(8)代入方程(11)并且设分数泰伯数  $\alpha/\beta = N$ , 则有

$$\text{tg}\phi/N = T^2/\lambda f_c \quad (13)$$

此式就是光学分数傅里叶变换产生分数泰伯像所要遵循的条件。

## 4 系统级联

这一节考虑透镜级联的情况。图 2 中两级透镜串连。假定每一级都满足上述讨论的条件: 分数傅里叶变换产生了分数泰伯像。用脚码“1”及“01”表示第一级中的参数, “2”及“12”表示第二级中的参数, “02”表示整个系统的参数。从方程(13)就有

$$\operatorname{tg} \phi_1 / N_{01} = T^2 / \mathcal{N}_e \quad (14)$$

和 
$$\operatorname{tg} \phi_2 / N_{12} = T^2 / \mathcal{N}_e \quad (15)$$

由于分数傅里叶变换具有可加性, 因而两个分数级分别为  $P_1$  和  $P_2$  的傅里叶变换级联就等于分数为  $(P_1 + P_2)$  的单个傅里叶变换。按照这一特性, 参考方程(7), 就有

$$|g_2(x_2)|^2 = \left| \int g_0(x_0) \exp\{j\pi[x_0 - x_2 / \cos(\phi_1 + \phi_2)]^2 / [\mathcal{N}_e \operatorname{tg}(\phi_1 + \phi_2)]\} dx_0 \right|^2 \quad (16)$$

从方程(16)可见对于级联系统的结论类似于第三节中的结论。

整个系统的泰伯数  $N_{02}$  应满足条件

$$\operatorname{tg}(\phi_1 + \phi_2) / N_{02} = T^2 / \mathcal{N}_e \quad (17)$$

当在平面  $x_2$  上形成分数泰伯像时, 像的比例因子

$$M_{02} = \cos(\phi_1 + \phi_2) \quad (18)$$

控制着像的大小并对泰伯像的实际观察周期有影响。联立方程式(14)、(15)和(17), 就立即得到泰伯数的级联运算法则为

$$N_{02} = \frac{(N_{01} + N_{12})(\mathcal{N}_e)^2}{(\mathcal{N}_e)^2 - N_{01}N_{12}T^4} \quad (19)$$

方程(19)表明在一个级联系统中, 如每一级都是分数傅里叶变换产生分数泰伯自成像, 那么总的泰伯数与第一级和第二级的泰伯数有关。这意味着级联系统中输出平面  $x_2$  上的分数泰伯像的周期与每一级的泰伯数有关。计算很简单, 但不是线性的。适当调整光学参数同样能使整个系统具有双重变换的能力, 这一点可从方程(19)或(17)看出。

## 5 实验与应用

通过上述分析, 结论是分数泰伯效应可以与分数傅里叶变换同时发生或者说可由分数傅里叶变换产生。这可用实验证实。在图 1 的  $x_0$  平面处放置一张朗奇光栅并以相干光照明。图中泰伯数  $N$  选为  $1/2$ , 透镜焦距为  $130 \text{ mm}$ , 光波波长为  $0.6328 \mu\text{m}$ , 光栅周期  $T$  为  $0.5 \text{ mm}$ , 光栅开口比为  $1/4$ 。把这些参数代入方程(13)和方程(5), 就能计算出  $\phi$  为  $119.7^\circ$  或  $60.3^\circ$ 。我们用  $\phi$  等于  $119.7^\circ$  做一实验验证, 即光栅放置在透镜左边距透镜的距离为  $f(1 - \cos\phi) = 194.5 \text{ mm}$  处。在透镜右边的这个距离上就可以得到  $N$  为  $1/2$  的分数泰伯像。它的周期是  $T/2$ , 但还要考虑一个尺度因子  $\cos\phi$ , 因而观察到的实际周期应为  $\cos\phi T/2$ , 它等于  $0.124 \text{ mm}$ 。图 3(a)

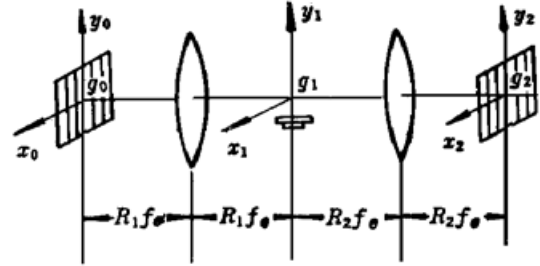


图 2 研究双重分数变换的装置

Fig. 2 The setup for studying the dual fractional transform

及 3(b) 分别是物光栅和它的分数傅里叶变换下的分数泰伯像的照片。图 3(a) 的照相放大因子为 2, 图 3(b) 的照相放大因子为 10。从图 3 中可以看到 3(a) 与 (b) 有两点不同。一为周期不同, 另一为黑白条纹的宽度比不同。图 3(a) 的黑条纹宽度与节距之比为 1/4, 图 3(b) 的黑条纹宽度与节距之比为 1/2。如果从分数泰伯像中扣除比例因子  $\cos\phi$ , 则此光栅像正好是物光栅再加上移过了二分之一周期后的这个物光栅。像的频率正好是物光栅频率的 2 倍。这说明图 3(b) 确实是带有一个比例因子的分数泰伯像。

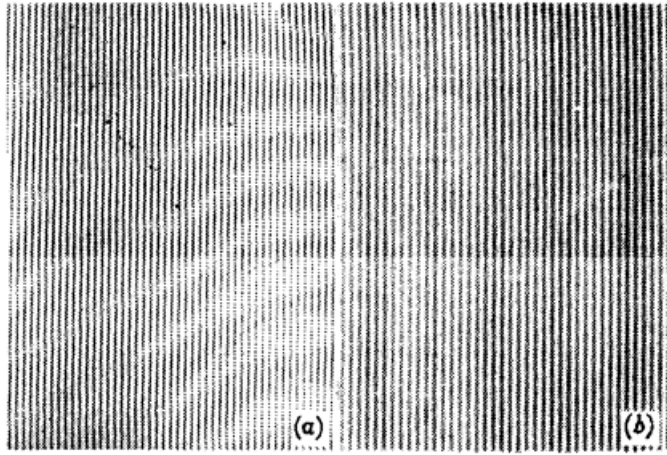


图 3 光栅的双重分数变换的结果  
焦距  $f$ : 130 mm, 角度  $\phi$  119.7°。(a) 光栅, 节距  $T$ : 0.5 mm, 开口比 1/4, 照相比例: 2; (b) 分数泰伯像。条纹周期: 0.124 mm, 亮暗宽度比: 1:1, 照相比例: 10

Fig. 3 The result of a grating under the dual fractional transform

The focal length  $f$  is 130 mm, and  $\phi$  is 119.7°. (a) the grating, its pitch  $T$  is 0.5 mm, and the open ratio is 1/4, photographic scale: 2; (b) the fractional image, the period of fringes is 0.124 mm, the width of black fringes occupies half period, photographic scale: 10

作为一个例子, 我们用它来观察炽热气体的流型。在图 2 所示的系统中, 在  $x_1$  平面处插入一个酒精焰炬。由于火焰近似于一种位相型物体, 可以用  $\exp[j\theta(x)]$  来表示它。这样, 第二级分数傅里叶变换的输入便是  $g_1(x_1)\exp[j\theta(x)]$ 。 $g_1(x_1)$  是物光栅  $g_0(x_0)$  的第一级分数傅里叶变换的输出, 也是它的第一级分数泰伯像。根据方程(4) 在平面  $x_2$  上的输出为

$$\begin{aligned} g_2(x_2) &= F^2\{g_1(x_1)\exp[j\theta(x_1)]\} \\ &= \int g_1(x_1)\exp[j\theta(x_1)] \times \exp[j\pi(x_1^2 + x_2^2)/(\mathcal{N} \operatorname{ctg}\phi)] \exp[-j2\pi x_1 x_2/(\mathcal{N} \sin\phi)] dx_1 \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \int_{-x_1}^{x_1} u(x_1)\exp[j\theta(x_1)] dx_1 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{这里 } u(x_1) = g_1(x_1)\exp[j\pi(x_1^2 + x_2^2)/(\mathcal{N} \operatorname{ctg}\phi)] \exp[-j2\pi x_1 x_2/(\mathcal{N} \sin\phi)] \quad (21)$$

$$\text{设 } \int u(x_1) dx_1 = v(x_1) \quad (22)$$

方程(20)就可写成

$$\begin{aligned} g_2(x_2) &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \int_{-x_1}^{x_1} \exp[j\theta(x)] dv(x_1) \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \{v(x_1)\exp[j\theta(x_1)]\} \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \int_{-x_1}^{x_1} v(x_1)\exp[j\theta(x_1)] j d\theta(x_1) \end{aligned} \quad (23)$$

假设焰炬是关于  $x_1$  对称的并且在无穷远处  $\theta = \theta_0$ , 则方程(23) 便成为

$$g_2(x_2) = \exp(j\theta_0) \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \int_{-x_1}^{x_1} u(x_1) d(x_1) - \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \int_{-x_1}^{x_1} v(x_1)\exp[j\theta(x_1)] j d\theta(x_1) \quad (24)$$

把方程(21)代入(24), 就有

$$g_2(x_2) = \exp(j\theta_0) F^2[g_1(x_1)] - j \int_{-\infty}^{+\infty} v(x_1)\exp[j\theta(x_1)] d\theta(x_1) \quad (25)$$

方程(25)右边第一项  $F^2[g_1(x_1)]$  在上述导出的条件下可以是光栅  $g_0(x_0)$  的分数泰伯像。第

二项与位相物体的分布有关。如果物体是均匀的则  $d\theta(x_1) = 0$ , 第二项就为 0。我们放一块与  $F^{\beta_2}[g_1(x_1)]$  匹配的检测光栅在  $x_2$  平面上来观察第二项。物光栅与检测光栅的栅线必须平行放置, 并且都在铅垂方向。检测光栅的条纹必须能与分数泰伯像  $F^{\beta_2}[g_1(x_1)]$  互补。首先观察没有火焰时的莫尔条纹, 渐渐地转动检测光栅使得条纹宽度趋于无限。这时, 如果在  $x_1$  处放入一个焰炬, 炽热气体的流型分布就立即出现在检测光栅上。图 4 便是它的照片, 它相应于方程(25)中的积分项。

用分数傅里叶变换产生分数泰伯像来观察火焰, 运算简单并且具有一个灵活的比例因子  $\cos\phi$  可调节照明区的大小。除此之外, 光栅像的栅线的周期也可调节。当然光栅在平行光照明下在自由空间中形成的泰伯像也可用来观察火焰, 但照明区的大小是无法调节的。另一种观察位相物体的方法是波面成像剪切干涉法。把位相体的波面通过两条光路成像在一起, 并使两个波面具有相对剪切量, 这样就产生干涉条纹。这种装置相对复杂并且尺寸大, 因为对于透镜成像, 物体和它的像之间的距离至少为  $4f$ , 而对于分数傅里叶变换, 物体与变换平面之间的距离为  $2R \tan(\phi/2)$  (见图 1), 即  $2f(1 - \cos\phi)$ 。

## 6 结 论

在方程(13)这一条件下, 分数傅里叶变换可使光栅产生分数泰伯像即分数傅里叶变换和分数泰伯自成像能同时发生。这种双重变换系统能多个级联。级联结果仍能为一种双重变换。级联的运算法则由方程式(19)给出。由双重分数变换得到的光栅像的大小和周期都是灵活可变的。比例因子为  $\cos\phi$  控制着像的大小。分数像的实际观察周期为原光栅周期的  $\cos\phi/\beta$  倍。利用这双重的分数变换有助于一些光学系统的设计和分析, 也有助于光路级联中计算的简化和概念的清晰。

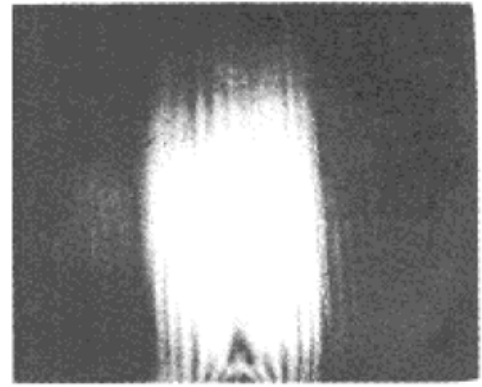


图 4 双重分数变换测得的火焰密度场

Fig. 4 The flame density distribution detected by the dual fractional transform

## 参 考 文 献

- 1 Nammias. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. *J. Inst. Math. Appl.*, 1980, **25**: 241~ 265
- 2 McBride, F. H. Kerr. On Namias' fractional Fourier transforms. *IMA J. Appl. Math.*, 1987, **39**: 159 ~ 175
- 3 Lohmann. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**: 2181~ 2186
- 4 Mendlovic, H. M. Ozaktas. Fractional Fourier transform and their optical implementation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**: 1875~ 1881
- 5 Ozaktas, D. Mendlovic. Fractional Fourier transform and their optical implementation: *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**: 2522~ 2531
- 6 Ozktas, B. Barshan, D. Mendlovic *et al.*. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**: 547~ 559
- 7 Lohmann, D. Mendlovic. Fractional Fourier transform: photonic implementation. *Appl. Opt.*, 1994,

- 33 : 7661~ 7664
- 8 Dorsch, A. W. Lohmann, Y. Bitran *et al.*. Chirp filtering in the fractional Fourier domain. *Appl. Opt.*, 1994, **33** : 7599~ 7602
- 9 Bernardo, O. D. D. Soares. Fractional Fourier transforms and imaging. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11** : 2622~ 2626
- 10 Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic *et al.*. Space-variant filtering in fractional Fourier domains. *Inst. Phys. Conf. Ser.*, 1994, **139** Part 1: 285~ 288
- 11 Rainer G. Dorsch, Adolf W. Lohmann. Fractional Fourier transform used for a lens-design problem. *Appl. Opt.*, 1995, **34** : 4111~ 4112
- 12 K. Paturski, E. Wolf, ed.. The self-imaging phenomenon and its applications, in *Progress in Optics. Amsterdam North-Holland*, 1989, **28** : 3~ 110
- 13 Liren Liu, Xiaoben Liu, Liangang Ye. Joint Talbot effect and logic-operated moiré patterns. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1990, **7** : 970~ 976

## Fractional Talbot Effect under Fractional Fourier Transform

Hua Jianwen Liu Liren

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

**Abstract** How to produce the Talbot fractional effect using the fractional Fourier transform is discussed. The optical conditions under which this dual transform will be realized, transform scale factor, image period and operation rule for cascade are deduced, and then an experiment was made to verify the theory. This dual transform is helpful for the design, analysis and calculation of an optical system. An example of application is given in the end.

**Key words** optical transform, Fourier transform, Talbot effect