第 24 卷 第 2 期 1997 年 2 月
中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS
Vol. A24, No. 2 February, 1997

超短光脉冲在均匀等离子体中群速度的理论分析

程 亚 徐至展 沈百飞 张文琦 陈建文
(中国科学院上海光机所 上海 201800)

提要 由稀薄均匀的等离子体中麦克斯韦方程的一个严格的积分解求得了超短光脉冲在其中的演化及群速度表达式。结果表明,零级近似下的群速度与近轴近似解相同; 一级近似下,群速度与脉宽、空间坐标和时间坐标均有关。

关键词 超短光脉冲,群速度,等离子体

1 引 言

超短光脉冲在均匀等离子体中传播时,其群速度的具体数值直接关系到粒子加速器方案中被加速电子能否有效地从脉冲中获取能量,因而作为一个很有实际意义的问题得到越来越多的学者的关注[1~3]。最近,E. Esarey 等人在初始光脉冲长度远大于光周期和忽略脉冲演化过程中的非线性效应的前提下,导出了超短光脉冲在均匀等离子体中的群速度的解析表达式[1]。与原有的描述均匀介质中高斯光传播的近轴近似解[4]相比,此结果有两点主要的改进: (1) 近轴近似解的求解中略去了对光场空间包络函数的两次导数,而 E. Esarey 等人则加以考虑; (2) 在近轴近似解中光束被认为是无限长的,而 E. Esarey 等人则考虑了脉宽对群速度的影响,从而使结果更为精确。但是他们的方法仍只对脉宽较长的光束有效,而且为了便于计算,他们研究的并非是实验中所常用的径向、纵向均为高斯分布的光脉冲,而是略为变形的非高斯光。

本文以均匀媒质中的麦克斯韦方程出发,给出了上述问题的一个严格的形式解,从而将一个二阶偏微分方程转变为积分问题。此积分的实质是两次傅里叶变换,因而非常便于用数值方法处理。对于初始时刻光脉冲在径向和纵向均为高斯分布的情况下,本文得到了光脉冲随时间演化及其群速度的解析表达式。在低阶近似下,此结果接近于近轴近似解。如果进一步考虑高阶效应,还可给出对近轴解的修正。此结果还直接体现了脉冲包络随时间的传播。

2 理论分析

2.1 积分解

光在三维空间中均匀等离子体内传播的波动方程为:

收稿日期: 1996—03—29; 收到修改稿日期: 1996—05—13

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{a}=k_p^2\vec{a} \tag{1}$$

上式中 c 为真空中光速, k_p 为等离子体波矢, $\vec{a}=e\vec{A}_\perp/(m_ec^2)$ 为归一化的横向矢势, 其中 e, m_e 分别为电子电荷及质量, $\vec{A}_\perp$ 为光波横向矢势。一般而言 k_p 是 $\vec{a}$ 的非线性函数。当 $|a|\ll 1$, 可近似认为 k_p 是常数。此时, (1) 式有众所周知的平面波解:

$$\vec{a}=a_c\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t) \tag{2}$$

a_c 为常数振幅。波矢及频率 $\vec{k}$, ω 满足色散关系:

$$\begin{aligned}\omega^2-k^2&=k_p^2\\ k^2&=k_x^2+k_y^2+k_z^2\end{aligned} \tag{3}$$

而由于式(1)是线性方程, 其解必然可以分解成各平面波的迭加。首先, 将初始光脉冲写成

$$\vec{a_0}=a_0\exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right)\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{L^2}\right)\cdot\exp(ik_0z) \tag{4}$$

其中 a_0 为脉冲中心振幅, r_0 表征焦斑大小, L 为脉宽。(3) 式的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\tilde{a}&=FT[\vec{a_0}]\\ &=\frac{a_0}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{r_0^2}\right)\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{L^2}\right)\cdot\exp(ik_0z)\cdot\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r})\mathrm{d}\vec{r}\\ &=\frac{a_0r_0L_0}{2\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{r_0^2}{4}(k_x^2+k_y^2)\right]\cdot\exp\left[-\frac{L^2}{4}(k_z-k_0)^2\right]\end{aligned} \tag{5}$$

函数 $\tilde{a}$ 表征各平面波分量的强度。由于每个平面波均按色散关系(3) 独立传播, 任意时刻 t 之后的脉冲形状应当由该时刻所有的平面波之和决定, 即

$$\begin{aligned}a(t)&=\frac{a_0r_0L_0}{8\pi\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{r_0^2}{4}(k_x^2+k_y^2)\right]\cdot\exp\left[-L^2(k_z-k_0)^2\right]\\ &\quad\times\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}-ict\sqrt{k^2+k_p^2})\mathrm{d}\vec{k}\\ &=FT^{-1}\left[\tilde{a}\cdot\exp\left(-ict\sqrt{k^2+k_p^2}\right)\right]\end{aligned} \tag{6}$$

(6) 式中的最后表达式可适用于任意初始光脉冲 $\vec{a_0}$。如果用数值方法计算上式显然比直接求解(1) 式方便。为了验证(6) 式确实是(1) 式的解, 可将(6) 代回(1), 即得均匀介质中的色散关系(3)。同时, 当 $t=0$, (6) 即为(4), 即满足方程(1) 的初始条件。

2.2 超短光脉冲演化的零级近似

对于脉冲长度 $L>10\lambda$ (10~100 fs) 的光束, λ 为波长, 可认为其平面波的主要部分集中在 k_0 附近(从数学上看, 积分号内的高斯函数仅在 $k_z\simeq k_0$, k_x, $k_y\simeq 0$ 附近取值, 其 k 空间的宽度分别与 L, r_0 成反比。此两者通常均远大于波长。一般的实验都可保证 $\delta k/k_0<1/10$), 因此将(6) 式中指数因子的时间频率项展开为:

$$\sqrt{k^2+k_p^2}=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2+k_p^2}=k_z\cdot\left(1+\frac{k_x^2}{2k_z^2}+\frac{k_y^2}{2k_z^2}+\frac{k_p^2}{2k_z^2}\right) \tag{7}$$

令 $k_z=k_0+\delta k_z$, 则有

$$\sqrt{k^2-k_p^2}=k_z+\frac{k_x^2}{2k_0}\left(1-\frac{\delta k_z}{k_0}\right)+\frac{k_y^2}{2k_0}\left(1-\frac{\delta k_z}{k_0}\right)+\frac{k_p^2}{2k_0}\left(1-\frac{\delta k_z}{k_0}\right) \tag{8}$$

上式用到 $\left(1+\frac{\delta k_z}{k_0}\right)^{-1}=1-\frac{\delta k_z}{k_0}$。代入(6) 式后, 得到

$$a(t)=\frac{a_0r_0L_0}{8\pi\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{r_0^2}{4}(k_x^2+k_y^2)\right]\cdot\exp\left[-\frac{L^2}{4}(k_z-k_0)^2\right]$$
$$\times\exp\left[i\vec{k}\cdot\vec{r}-ict\cdot k_z-\left(\frac{k_x^2}{2k_0}+\frac{k_y^2}{2k_0}+\frac{k_p^2}{2k_0}\right)\left(1-\frac{\delta k_z}{k_0}\right)\right]\mathrm{d}\vec{k} \quad (9)$$

对于最低阶的近似, 可以略去上式中的$\left(\frac{k_x^2}{2k_0}+\frac{k_y^2}{2k_0}\right)\frac{\delta k_z}{k_0}$项。首先对(9) 式三重积分中的 k_z 积分, 得到

$$\frac{L_0}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{L^2}{4}(k_z-k_0)^2\right]\cdot\exp\left[ik_zz+ict\left(k_z+\frac{k_p^2}{k_0}-\frac{k_p^2}{2k_0}\cdot\frac{k_z}{k_0}\right)\right]\mathrm{d}k_z$$
$$=\exp-\frac{\left[z-ct\left(1-\frac{k_p^2}{2k_0^2}\right)\right]^2}{L^2}\cdot\exp\left[ik_0(z-ct)+ict\cdot\frac{k_p^2}{2k_0}\right] \quad (10)$$

再对 k_x, k_y 分别积分, 得到

$$\frac{r_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{r_0^2}{4}(k_x^2+k_y^2)\right]\cdot\exp-ict\left(\frac{k_x^2}{2k_0}+\frac{k_y^2}{2k_0}\right)\exp(ik_xx+ik_yy)\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y$$
$$=\frac{r_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{r_0^2}{4}\left(1+\frac{2ict}{k_0r_0^2}\right)(k_x^2+k_y^2)\right]\exp(ik_xx+ik_yy)\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \quad (11)$$

令 $k_0r_0^2/2=Z_R$ 为瑞利长度, (11) 式变成

$$\mathrm{RHS}(11)=\frac{1}{\sqrt{1+ict/Z_R}}\cdot\exp\left[\frac{-r^2}{r_0^2(1+ict/Z_R)}\right] \quad (12)$$

因此最终的解为

$$a(t)=\frac{1}{\sqrt{1+ict/Z_R}}\cdot\exp\left[\frac{-r^2}{r_0^2(1+ict/Z_R)}\right]\cdot\exp-\frac{\left[z-ct\left(1-\frac{k_p^2}{2k_0^2}\right)\right]^2}{L^2}$$
$$\cdot\exp\left[ik_0(z-ct)+ict\cdot\frac{k_p^2}{2k_0}\right] \quad (13)$$

利用公式

$$\ln(a+ib)=\ln\sqrt{a^2+b^2}+i\tan^{-1}(b/a) \quad (14)$$

并令
$$\frac{ct}{Z_R}=\alpha_z,\qquad r_0\sqrt{1+\alpha_z^2}=r_s \quad (15)$$

可得

$$a(t)=\frac{a_0r_0}{r_s}\cdot\exp\left[\frac{-r^2}{r_s^2}\right]\cdot\exp-\left\{\frac{\left[z-ct\left(1-\frac{k_p^2}{2k_0^2}\right)\right]^2}{L^2}\right\}\exp(i\Phi) \quad (16)$$

Φ反映了光脉冲的位相变化, 为

$$\Phi=k_0(z-ct)+\alpha_z\cdot r_0^2\cdot k_p^2/4+\alpha_z\cdot\frac{r_0^2}{r_s^2}-\tan^{-1}\alpha_z \quad (17)$$

上式与文献中给出的近轴近似解[1,4]

$$a_p=\frac{a_0r_0}{r_s'}\cdot\exp\left[\frac{-r^2}{r_s'^2}\right]\cdot\exp(i\Phi_p) \quad (18)$$

$$\phi_p = k_0(z - ct) + \alpha_z' \cdot r_0^2 \cdot k_p^2/4 + \alpha_z' \cdot \frac{r_0^2}{r_s^2} - \tan^{-1}\alpha_z' \tag{19}$$

相比,除了 $\alpha_z' = z/Z_R$, $r_s' = r_0\sqrt{1+(\alpha_z')^2}$ 外,其余符号的意义均为一致。显然(18),(19)式与(16),(17)式的形式极为接近。(16)式中的 $\exp-\left\{\left[z-ct\left(1-\frac{k_p^2}{2k_0^2}\right)\right]^2/L^2\right\}$ 项反映了脉冲包络以小于光速的速度 $c\left(1-\frac{k_p^2}{2k_0^2}\right)$ 移动。另外,α_z 和 α_z' 的区别表明,高斯光束随着传播距离的变化由衍射造成的发散也可看成随传播时间变长引起散焦。

以下求零级近似下的群速度表达式。精确的光脉冲群速度应为 $v_g = \frac{\partial \bar{z}}{\partial t}$,$\bar{z}$ 反映光脉冲能量中心的位置,可由下式得出

$$\bar{z} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty} z|a_l|^2\mathrm{d}z}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|a_l|^2\mathrm{d}z} \tag{20}$$

其中$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\cdot|a_l|^2$ 是一守恒量,表示光能量没有耗散。

为了简便起见,本文不拟采用(20)式进行计算。因为当脉宽比较长的情况(对脉宽 100 fs 的超短脉冲,$L \simeq 30\lambda \gg \lambda$)利用色散关系求群速度仍然是好的近似。此时

$$k_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = k_0,$$

$$\omega = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_z}\cdot\frac{c}{Z_R} = ck_0 + \frac{ck_p^2}{2k_0} + \frac{2c}{k_0 r_s^2}\left[-\frac{r^2}{r_s^2}(1-\alpha_z)\right] \tag{21}$$

上两式表明在最低阶近似下光频率成为时间的函数,而光波矢却与空间无关。这与文献[1]中的第(5)式恰好相反。而在 E. Esarey 的结果中,空间、时间坐标同时出现在位相因子[见文献[1]中28(b)式],从而 ω 与 k 都是时空的函数[文献[1]中29(a)、29(b)式]。但对最低阶近似解本文与此两者满足相同的色散关系

$$\omega^2 - c^2k_z^2 = c^2k_p^2 + \frac{4c^2}{r_s^2}\left[1-\frac{r^2}{r_s^2}(1-\alpha_z^2)\right] \tag{22}$$

由(21),(22)给出的群速度表达式为

$$\frac{v_g}{c} = \frac{1}{c}\frac{\partial \omega}{\partial k_z} = 1 - \frac{k_p^2}{2k_0^2} - \frac{2}{k_0^2 r_s^2}\left[\frac{1-\alpha_z^2}{(1+\alpha_z^2)^2} - \frac{r^2}{r_s^2}\cdot\frac{1-6\alpha_z^2+\alpha_z^4}{(1+\alpha_z^2)^2}\right] \tag{23}$$

2.3 超短脉冲演化的一级近似解

此时应考虑(9)式中的 $\left(\frac{k_x^2}{2k_0}+\frac{k_y^2}{2k_0}\right)\frac{\delta k_z}{k_0}$ 项,如上,首先对 k_z 积分,其结果只是将(10)式中的 k_p^2 项调换成 $k_x^2+k_y^2+k_p^2$。因此再对 k_x, k_y 的积分式为

$$\frac{r_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{r_0^2}{4}(k_x^2+k_y^2)\right]\cdot\exp\left[-ict\left(\frac{k_x^2}{2k_0}+\frac{k_y^2}{2k_0}\right)\right]$$

$$\cdot\exp\left[-\left(z-ct+ct\cdot\frac{k_x^2+k_y^2+k_p^2}{2k_0}\right)^2/L^2\right]\exp(ik_x x+ik_y y)\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y$$

$$= \frac{r_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{r_0^2}{4}\left(1+\frac{8ct\cdot(z-ct+ctk_p^2/2k_0)}{(Lr_0k_0)^2}+\frac{2ict}{k_0r_0^2}\right)(k_x^2+k_y^2)\right]$$

$$\cdot\exp(ik_x x+ik_y y)\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{24}$$

上式已略去了高阶小量$\frac{k_x^4}{k_0^4}, \frac{k_y^4}{k_0^4}, \frac{k_x^2k_y^2}{k_0^4}$。不难得到最后的波包演化形式为

$$a(t)=\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{1}{\sqrt{1+ict/Z_R'}}\cdot\exp\left[\frac{-r^2}{Mr_0^2(1+ict/Z_R')}\right]$$
$$\cdot\exp-\left\{\frac{\left[z-ct\left(1-\frac{k_p^2}{2k_0^2}\right)\right]^2}{L^2}\right\}\cdot\exp\left[ik_0(z-ct)+ict\cdot\frac{k_p^2}{2k_0}\right]$$
$$=\frac{a_0r_0}{r_s''}\cdot\exp\left[\frac{-r^2}{r_s''^2}\right]\cdot\exp-\left\{\frac{\left[z-ct\left(1-\frac{k_p^2}{2k_0^2}\right)\right]^2}{L^2}\right\}\exp(i\Phi'') \tag{25}$$

Φ''反映了光波脉冲的位相变化, 为

$$\Phi''=k_0(z-ct)+\alpha_z''\cdot r_0^2\cdot k_p^2/4+\alpha_z''\cdot\frac{r_0^2}{r_s^2}-\tan^{-1}\alpha_z'' \tag{26}$$

(25), (26) 式中的$M=1+\frac{8ct\cdot(z-ct+ctk_p^2/2k_0)}{(Lr_0k_0)^2}$, $Z_R'=M\cdot Z_R$, $r_s''=\sqrt{M}\cdot r_s$, $\alpha_z''=ct/Z_R'$。

由于时空坐标同时进入位相项, 最后的群速度表达式将大大复杂化。此时可以将(20) 与(25) 式结合, 利用计算机进行数值处理。

3　结　论

本文的方法与过去方法的主要区别在于:

(1) 将一个求解二阶偏微分方程的问题化为求二次傅里叶变换的积分, 从而便于用数值处理任意初始条件, 包括脉宽极短的超短光脉冲演化过程;

(2) 零级近似中直接给出了 Z 方向脉冲包络随时间在 z 轴上传播的 $\exp\frac{-\left[z-ct\left(1-\frac{k_p^2}{2k_0^2}\right)\right]^2}{L^2}$ 项, 一级近似还给出了脉冲包络随时间、空间的演化;

(3) 与文献[2] 中的$\alpha_z'=\frac{z}{Z_R}$不同, 本文零级近似中$\alpha_z=\frac{ct}{Z_R}$。对于较长的脉冲, 两者的物理意义不尽相同但对群速度的具体数值而言相差不大。对很短的脉冲, 两者的数值有所区别;

(4) 给出了脉宽及时空坐标对波包演化的影响;

(5) 上述结果的近似适用范围要求: 脉宽、焦斑半径须大于几十个波长; 仅在波包传输长度小于瑞利长度时可用, 否则展开式中的高阶项将变大, 引起误差。对当前绝大部分的激光气体靶实验, 这两个条件都是满足的。

(6) 最后指出一点, 与文献[1] 类似, 我们对初始条件的假设是一个在等离子体中以高斯分布形式存在的波包。由于真空的色散关系和等离子体不同, 可以预计, 如果激光在真空中聚焦形成一个高斯波包, 那么进入等离子体后必然要变形。因此某种意义上说, 我们研究的高斯波包是由真空中略为变形的高斯波包形成的, 其纵向脉宽短于进入等离子体前的波包的纵向脉宽。因此本文中所用的 k_0 接近但并非真空中的波矢。另外, 从公式(16) 也可看出: 一级近似下脉宽 L 不随时间改变, 因此 k_0 是 常数;

(7) 由于等离子体中低于等离子体频率的电磁波不能传播, 因此在公式(6) 中没有被包含。在短距离(趋肤深度) 内, 这部分消逝波将影响电磁场分布, 但是由于等离子体很稀薄, 这部分波比重很小, 影响是极微弱的。在趋肤深度外这部分波的影响可忽略不计。

参 考 文 献

1 E. Esarey, P. Sprangle, M. Pilloff *et al.*. Theory and group velocity of ultrashort, tightly focused laser pulses. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1995, **12**(9)：1695
2 C. D. Decker, W. B. Mori. Group velocity of large amplitude electromagnetic waves in a plasmas. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**(4)：490
3 C. D. Decker, W. B. Mori. Group velocity of large-amplitude electromagnetic waves in a plasma. *Phys. Rev. E*, 1995, **51**(2)：1364
4 A. 亚里夫. 量子电子学, 第六章. 上海：上海科学技术出版社, 113~ 118

An Integral Method for Analysing Group Velocity of Ultroshort Laser Pulses in a Plasma

Cheng Ya Xu Zhizhan Shen Baifei Zhang Wenqi Chen Jianwen
(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

Abstract An integral solution of Maxwell equation which can discribe the evolution of an arbitrary laser pulse in a homogeneous plasma is given. Especially, an analytical expression of group velocity of ultroshort laser pulses is gotten by using the integral solution. The relativistic effect is neglected in this study.

Key words ultroshort laser pulse, group velocity, plasma