

傍轴黎曼几何光学

V. 傍轴光束的空间变换*

邓锡铭 郭弘** 曹清

(高功率激光物理国家实验室, 中国科学院上海光机所, 上海 201800)

提要 引入一个复数空间(黎曼空间)和空间变换复数曲率 ρ , 利用该曲率与光束的波面曲率 ρ_w 相耦合所得的新的复数曲率 ρ_c , 研究了傍轴光束传输的一些问题。

关键词 黎曼空间, 复数曲率

1 引言

文献[1]中已有利用古典微分几何学方法研究几何光学传输问题的例子, 但尚未涉及有关光的衍射传输的问题(在那里衍射或波动效应对几何光线所造成的偏差由光学微扰论方法来处理)。之后, 文献[2]在光流体模型的基础上^[3], 引用光学度规将微分几何学方法引进光束传输的研究中。并求出黎曼曲率 R ^[2]:

$$R = \frac{1}{n^3} \left[\nabla^2 n - \frac{1}{2n} (\nabla n)^2 \right] \quad (1)$$

式中 n 为光折射率。它纯粹是一个与费马原理相对应的几何光学范筹的几何量, 不涉及光的波动性质。但是, 若用广义光折射率 n_c 取代 n , 则 R 含有光波动信息。 n_c 可表达为^[2]:

$$n_c^2 = n^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} + \frac{1}{k^2} \nabla(\log n) \cdot \nabla \Phi_0 \quad (2)$$

对于自由空间^[2,3]

$$n_c^2 = 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \quad (3)$$

加上傍轴条件

$$n_c \approx 1 + \frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \quad (4)$$

所以, 在自由空间传输的傍轴光束(以下简称傍束)的黎曼曲率近似等于

$$R = \nabla^2 \left[\frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \right] \quad (5)$$

而 HMO 的内应力 f 等于^[3]

* 国家863计划416主题所属课题, 并得到416-2专题和863激光技术青年基金的经费支助。

** 现为华南师范大学量子电子学研究所博士后。

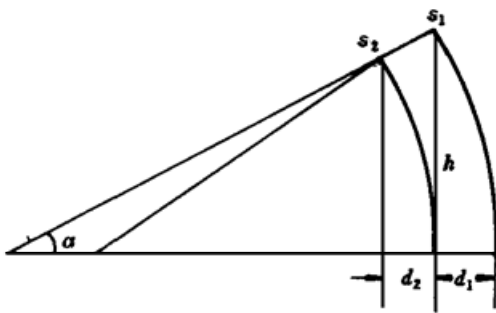
收稿日期 · 1996年3月20日; 收到修改稿日期 · 1996年5月24日

$$f = - \nabla \left[\frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \right] \tag{6}$$

所以, R 又等于

$$R = - \nabla \cdot f \tag{7}$$

用 n_c 取代 n 之后, 光束传输的问题就被完全几何化了, 而且此时的几何已含有全部波动信息。这种波动信息反映在自由空间传输的光束已不再是直线(因为此时的 n 已被 n_c 所代替, 而后者是包含了波动信息的), 而是弯曲的衍射光线了。本文将试图引入一个复数空间^[4,5](以下称黎曼空间或黎空间) 以及一个复数变换曲率 ρ_s , 在此黎空间中, 与自由空间中传输光束相对应的黎流线都是直线。同时, 该复数空间变换曲率 ρ_s 与光束的波面曲率 ρ_w 相耦合所得的新的复数曲率 ρ_c , 可用以研究傍轴光束传输的一些问题。为了讨论方便和简明, 只讨论一维(x) 傍束。以 z 轴作为传输轴。



2 两个曲率的叠加

如图 1 所示, 现考虑两个圆弧 s_1, s_2 代表的两个曲率的叠加。当角 α 很小, 下列近似式成立

$$R_1 = \frac{h^2}{2d_1} \tag{8}$$

$$R_2 = \frac{h^2}{2d_2} \tag{9}$$

Fig. 1 The superposition of two curvatures R_1, R_2 分别代表两个圆弧的曲率半径。于是, 两个曲率叠加后的合成曲率 $1/R_{12}$ 显然等于

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{10}$$

式中 R_{12} 是合成曲率半径。若第二圆弧曲率半径是一虚数, 则合成曲率是一复数, 等于

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{i}{R_2}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{11}$$

一般来说, 一维光束的任一点都有该点的波面曲率半径, 而且是单值的。下面的核心问题是要找到一个空间变换曲率, 然后将光束在普通空间(以下简称普空间) 的波面曲率与这个空间变换曲率叠加, 叠加后的合成曲率必须满足衍射光线在新空间的直线性要求。

以 $\rho_w = 1/R_w$ 代表光束在普空间的波面曲率, $\rho_s = 1/R_s$ 代表复数空间变换曲率, $\rho'_c = 1/R'_c$ 代表两个曲率叠加后的合成曲率。我们发现, 要满足衍射光线在新空间的直线性要求, 则空间变换曲率必须等于

$$\frac{1}{R_s} = - i (\sqrt{R})_x = - i \sqrt{\nabla_x^2 \left[\frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \right]} \tag{12}$$

式中 R 表示黎曼曲率, 角标“ x ”代表 x 分量。

引用(11) 式, 复合成曲率 $1/R'_c$ 等于

$$\frac{1}{R'_c} = \frac{1}{R_w} - i \sqrt{\nabla_x^2 \left[\frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \right]} \tag{13}$$

所以, 实合成曲率 $1/R_c$ 等于

$$\frac{1}{R_c} = \sqrt{\left[\frac{1}{R_w}\right]^2 + \nabla_x^2 \left[\frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0}\right]} \quad (14)$$

这里所说的新空间, 其实就是黎空间。所以衍射光线束转换到新空间后就是直线束并且与黎流线束处处重合。

3 一个例子

为检验在空间变换后衍射光线的直线性, 将一维高斯束代入第2节的结果。

$$\Phi_0 = a \exp\left[-\frac{x^2}{\sigma^2}\right] \quad (15)$$

$$\frac{1}{R_w} = \frac{4z}{k^2 \sigma_0^2 \sigma^2} \quad (16)$$

$$\nabla_x^2 \left[\frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0}\right] = \frac{4}{k^2 \sigma^4} \quad (17)$$

代回(13)式, 得

$$\frac{1}{R_c} = \sqrt{\frac{16z^2}{k^4 \sigma_0^4 \sigma^4} + \frac{4}{k^2 \sigma^4}} = \frac{2 \sqrt{k^2 \sigma^4 + 4z^2}}{k^2 \sigma_0^2 \sigma^2} = \frac{2}{k \sigma_0 \sigma} \quad (18)$$

即光束在黎空间传输的波面曲率半径为

$$R_c = \frac{1}{2} k \sigma_0 \sigma \quad (19)$$

在光束腰面处的合成波面曲率半径为

$$(R_c)_{z=0} = \frac{1}{2} k \sigma_0^2 \quad (20)$$

所以, 高斯束在黎空间的传输可表示成图2。

至于检验衍射光线在黎空间传输的直线性, 则可从图2中相应的相似三角形的比得出

$$\frac{h}{k \sigma_0 \sigma} = \frac{\sigma_0}{k \sigma^2} \quad (21)$$

所以

$$h = \sigma$$

即通过光腰面的截距为 σ_0 的一条衍射光线, 若按照图中所示沿直线传播, 则它与任一横截面的截距就等于 σ 。而

$$\sigma = \frac{1}{k \sigma_0} \sqrt{k^2 \sigma_0^4 + 4z^2} \quad (22)$$

正是在普空间中沿双曲线迹传输。附带指出, 在普空间中, 高斯光束是从腰面开始的, 但在黎空间, 虽然 $1/R_w = 0$, 但 $1/R_s = i(2/k\sigma_0^2) \neq 0$, 即在黎空间中形成一段“虚焦距”^[4] 和“虚焦点” F 。

4 无波面畸变傍轴光束

前节以高斯束作为例子, 演示了空间变换。本节将推广至任意无波面畸变傍束。由文献 [6] 知, 在无波面畸变条件下, 光腰处的实际波面为平面, 若光腰位于 $z = 0$ 平面上, 并由文献 [5, 6] 知

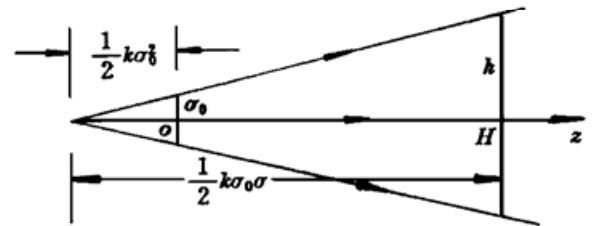


Fig. 2 The beam transmission in Riemannian space

$$E_t = \frac{1}{R_w^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Phi_0^2 dx = \frac{x_{av}^2}{R_w^2} \quad (23)$$

$$\left[1/R_w \right]^2 = \left[E_t/x_{av}^2 \right]$$

即

这里, E_t 为径向轨道能量, x_{av}^2 是二阶矩。

引用径向能量不变积分^[3]

$$E_{\perp} = E_i + E_t$$

波面曲率平方可写成^[6]

$$\left[\frac{1}{R_w} \right]^2 = \frac{E_{\perp} - E_i}{x_{av}^2} = \frac{A/k^2\sigma_0^2 - A/k^2\sigma^2}{(A/4)\sigma^2} = \frac{4(\sigma^2 - \sigma_0^2)}{k^2\sigma_0^2\sigma^4} = \left[\frac{4z}{k^2\sigma_0^2\sigma^2} \right]^2 \quad (24)$$

其中, σ_0^2, σ^2 可从给定截面的 Φ_0, L 分布算出。这个结果表示, 无波面畸变光束的波面曲率就是与之对应的等效高斯束的曲率。因为要保证在黎空间中衍射光线的直线性, 则要求

$$\nabla_x^2 \left[\frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \right] = \frac{4}{k^2\sigma^4}$$

式中 σ 是等效高斯光束的束宽。

而由文献[7]知

$$\frac{4}{k^2\sigma^4} = \frac{4}{k^2} \frac{k^2(R_{av}^2 E_{\perp} - x_{av}^2)}{4R_{av}^2 x_{av}^2} = \frac{1}{x_{av}^2} (E_{\perp} - E_t) = \frac{E_t}{x_{av}^2} = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\nabla_x \Phi_0)^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Phi_0^2 dx} \right]_{z=z \text{ plane}} \quad (25)$$

这就是任意无波面畸变傍束在 $z = z$ 截面上的黎空间曲率。这个曲率由于无波面畸变, 所以不含 x , 只是 z 的函数。故空间转换的曲面也是精确球面(对应于一维, 就是圆弧)。

以 m 阶厄米-高斯束为例

$$E_i = \frac{2m+1}{k^2\sigma^2}, \quad x_{av}^2 = \frac{1}{4}(2m+1)\sigma^2$$

所以, 黎空间曲率

$$\nabla_x^2 \left[\frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \right] = \frac{E_i}{x_{av}^2} = \frac{(2m+1)/k^2\sigma^2}{\frac{1}{4}(2m+1)\sigma^2} = \frac{4}{k^2\sigma^4}$$

与高斯束相同。加上厄米-高斯束的普空间曲率也与高斯束相同。所以厄米-高斯束与高斯束的黎流线完全相同。

5 波面畸变傍轴光束

由前节知道, 无波面畸变傍束的黎空间曲率只含变数 z , 不含 x 。即在任一横截面上, 各点的黎空间曲率相等。再加上波面曲率也不含 x , 故波面的法线束也会聚在一点, 空间曲面的法线束也必会聚在一点; 所以黎流线束也必会聚在虚焦点上。

在存在波面畸变时, 波面法线束和黎流线束都不再聚集于一点, 就如同存在像差的几何光线束不会全会聚于焦点一样。因此, 对于波面畸变傍束的传输, 应采用两种描述方式, 一种是传输的统计特征, 就如同前节及文献[6, 7]所描述的那样, 只不过用等效波面曲率半径 R_w 取代实际波面, 并引入一个平均空间转换曲率平方 $(1/R_s)_{av}^2$ 来取代其空间分布即可。平均项的定义如下

$$\left[\frac{1}{R_s} \right]^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0 \left[\frac{1}{2k^2} \nabla_x^2 \left[\frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \right] \right] dx \quad (26)$$

然后得出平均合成曲率

$$\frac{1}{R_c} = \sqrt{\left[\frac{1}{R_w} \right]_{av}^2 + \left[\frac{1}{R_s} \right]_{av}^2} \quad (27)$$

由此可得到等效黎流线束, 它会聚于一点, 形成等效虚焦点。

另一种描述方式是求出每条黎流线的指向, 即它与 z 轴的夹角。由于在远场区, 黎空间与普空间没有区别, 完全吻合, 因此在远场区衍射光线与黎流线处处重合, 同时注意到衍射光线在黎空间的直线性。因此, 只要求出某一点黎流线的夹角, 就可知道通过这一点的衍射光线传至远场时的指向, 它显然等于穿过该点的黎流线与 z 轴的夹角。在应用上, 求出这个夹角是重要的。用 β 代表这个夹角, 它等于

$$\beta = \frac{x}{R_c} = x \sqrt{\left[\frac{1}{R_w} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_s} \right]^2} = x \sqrt{\left[\frac{1}{R_s} \right]^2 + \frac{1}{2k^2} \nabla_x^2 \left[\frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \right]} \quad (28)$$

仍用高斯束来验证上式。选择一根衍射光线, 它与束宽端点的迹重合, 这根衍射光线在远场区与 z 轴的夹角 β' 等于

$$\beta' = \left[\frac{\sigma}{z} \right]_{z=\infty} = \left[\frac{1}{k\sigma_0} \sqrt{\frac{k^2\sigma_0^4 + 4z^2}{z^2}} \right]_{z=\infty} = \frac{2}{k\sigma_0} \quad (29)$$

而对应的黎流线的夹角 β 等于〔将高斯束参数代入(28)式〕

$$\beta = \sigma \sqrt{\frac{16z^2}{k^4\sigma_0^4} + \frac{4}{k^2\sigma^4}} = 2\sigma \sqrt{\frac{k^2\sigma_0^4 + 4z^2}{k^4\sigma_0^4}} = \frac{2\sigma}{k\sigma_0\sigma} = \frac{2}{k\sigma_0}$$

所以

$$\beta = \beta'$$

验证说明了 β 确实等于对应的衍射光线在远场的波矢 k 与 z 轴的夹角 β' 。

β 的表式(28)对傍轴光束是普遍适用的。本论文组第一、二篇^[4,5]也曾导出 β 的表达式, 但该式仅适用于无干涉存在的纯衍射情形, 即只有当光束质量因子 $M^2 = 1$ 时才适用。因而应该用现在导出的更为普适的(28)式来取代以前的结果。

6 黎空间的光束径向能量积分

普空间的光束径向能量积分 E_{\perp} 由两部分组成

$$E_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\nabla_x \Phi_0)^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0 (\nabla_x L)^2 dx \quad (30)$$

或写成

$$E_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\nabla_x \Phi_0) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0 \theta^2 dx \quad (31)$$

其中

$$\theta^2 \approx |\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_3|^2$$

衍射光线的弯曲起因于第一项积分的存在。但在黎空间, 黎流线都是直线, 即黎空间是普通空间的远场情形, 此时, $E_i = 0$, $E_{\perp} = E_i$ ^[3]。因此, 不会再出现第一项积分。所以, 在黎空间, 在傍轴条件下, E_{\perp} 等于〔引用(28)式〕

$$E_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0 \beta^2 dx \quad (32)$$

仍以高斯束为例,作为上式的验证。

$$\Phi_0 = a^2 \exp\left[-\frac{2x^2}{\sigma^2}\right] \quad \beta^2 = \frac{x^2}{R_c^2} = \frac{x^2}{(\sqrt{k}\sigma_0\sigma)^2}$$

代入(32)式,得

$$E_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \Phi_0}{\sqrt{k}\sigma_0^2\sigma^2} dx = \frac{\sqrt{k}\sigma^2}{\sqrt{k}\sigma_0^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2\sigma_0^2}$$

与在普空间计算的 E_{\perp} 值完前相同。

参 考 文 献

- 1 Yu. A. Kravtsov, Yu. I. Orlov. Geometrical Optics of Inhomogeneous Media. Berlin: Springer-Verlag, 1990
- 2 Hong Guo, Ximing Deng. Differential Geometrical Methods in the Study of Optical Transmission (Scalar Theory). I. Static Transmission Case. *J. O. S. A.*, 1995, **A12**(3) ·600; Hong Guo, Ximing Deng. Differential Geometrical Methods in the Study of Optical Transmission (Scalar Theory). II. Time-Dependent Transmission Theory. *J. O. S. A.*, 1995, **A12**(3) ·607
- 3 邓锡铭. 有限束宽光动力学. 杭州: 杭州大学出版社, 1993
- 4 邓锡铭, 郭 弘, 曹 清. 傍轴黎曼几何光学(I). 中国激光, 1995, **A22**(7) ·523
- 5 邓锡铭, 郭 弘, 曹 清. 傍轴黎曼几何光学(II). 中国激光, 1995, **A22**(8) ·607
- 6 邓锡铭, 郭 弘, 曹 清. 傍轴黎曼几何光学(IV). 中国激光, 1996, **A23**(8) ·727~ 731
- 7 邓锡铭, 郭 弘, 曹 清. 傍轴黎曼几何光学(III). 中国激光, 1996, **A23**(4) ·321~ 327
- 8 邓锡铭, 林伟平, 方洪烈. 傍轴光束传输的动力学分析. 光学学报, 1983, **3**(5) ·385

Paraxial Riemannian Geometrical Optics

V. Space-Transform of Paraxial Beams

Deng Ximing Guo Hong* Cao Qing

(National Laboratory on High Power Laser and Physics, Shanghai

Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

Abstract In this paper, the complex space (Riemannian space) and the complex space-transform curvature ρ_s are introduced. By employing the new complex curvature ρ_c which is the coupling of ρ_s and the wave-front curvature ρ_w of the beam, some problems of paraxial beam propagation are investigated.

Key words Riemannian space, complex curvature

* The author is now with South China Institute of Quantum Electronics, South China Normal University.