第23卷 第8期
1996年8月

中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS

Vol. A23, No. 8
.August, 1996

傍轴黎曼几何光学. Ⅳ. 两种光束质量因子*

邓锡铭 郭 弘** 曹 清

(高功率激光物理国家实验室,中国科学院上海光机所,上海 201800)

提要 引用光流体模型[2]的光束径向能量的不变积分分别讨论了光束波面畸变和振幅分布不均匀对光束质量因子 M^2 的影响;引入了光束质量因子的两种新定义,并讨论了这两个新质量因子与 M^2 的关系。

关键词 光束传输,广义厄米-高斯光束,光束质量

1 引 言

本论文组第二篇[1]在对任意傍轴光束的厄米-高斯展开中,提出了如何选择高斯光腰半径 σ_0。本文将继续分析前文结果,把傍轴光束分为两类,即波面无畸变光束与波面畸变光束,并分析两类光束的光束质量因子 M^2 之间的差异,由此建议引入衍射光束质量因子和几何光束质量因子及建立相应的定义。

为了简明,本文仍采用一维傍轴光束,传输轴为 z 轴,振幅 ϕ_0 及准程函 L 的分布函数只含变数 x,z,不含 y,光束是在真空中传输的线偏振、单色光束。其复振幅 ϕ 可表示为

$$\phi = \phi_0 e^{ikL} \tag{1}$$

其中复振幅 ϕ 已满足归一化条件,即对任一横截面来说,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^* \phi \mathrm{d}x = 1$$

按照光流体模型的定义[2],内禀能量 E_i 和径向轨道能量 E_t 分别为

$$\begin{aligned} E_i &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\nabla_x \phi_0)^2 \mathrm{d}x \\ E_t &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 (\nabla_x L)^2 \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}$,积分沿任一横截面进行。而不含变数 z 的径向能量则为

$$E_\perp = E_i + E_t \tag{3}$$

光束的厄米-高斯展开可表示为

$$\phi = \sum_m c_m \phi_m \tag{4}$$

---

* 本文系国家863计划416主题所属课题。

** 现为华南师范大学量子电子学研究所博士后。

收稿日期: 1996年2月14日; 收到修改稿日期: 1996年5月29日

其中 ϕ_m 为 m 阶厄米-高斯光束，c_m 为线性叠加系数，且 $\sum_m |c_m|^2 = 1$。

2 光束质量的评价

光束质量的优劣，主要是从应用角度来衡量的。一个光束能形成尽可能小的焦斑或以尽可能小的发散度传输至远处，则评价为优质光束。但比较两光束的质量高低时，必须在同一发散角条件下来比较它们焦斑的大小；或者在相同焦斑的条件下来比较它们的远场发散角。若要统一两个方面来整体评价光束质量，则需要制定光束质量的评价参数 Q。合理的整体的评价参数应该是

$$Q = \frac{k^2}{4}(\Omega \cdot \overline{A}) \tag{5}$$

Ω 代表光束远场发散立体角，$\overline{A}$ 代表在腰面上光束的横截面积，考虑到光束的衍射发散与波长成反比，为了规范评价，故引入$\frac{k^2}{4}$。由于光束横截面上强度分布不匀，立体角内的强度分布也不匀，在具体计算 Ω 及 $\overline{A}$ 时需加入光强度权重。为此，可引用文献[3]的结果。

这个评价参数 Q 就是当今受到普遍采用的光束质量因子 M^2[4]。

对于一维光束，整体质量评价参数 q 可写成

$$q = \frac{k}{2}(\beta \cdot d) \tag{6}$$

β 代表光束远场平面发散角，d 代表在腰面上光束焦斑的宽度。有了整体评价参数，就可对各类傍轴光束进行质量评价。

3 两类傍轴光束

将任意傍轴光束划分为波面无畸变光束和波面畸变光束。无畸变是指波面为精确的球面。无畸变一维波面为精确圆弧。显然，无波面畸变光束的轴上几何像差为 0。先讨论无波面畸变光束传输的一些统计特征。其中最重要的一个特征是等效波面曲率半径 R_{av} 与光束的实际波面曲率半径 R 相等。由文献[3,5]可知

$$R_{av} = \frac{x_{av}^2}{\int_{-\infty}^{\infty} x(\nabla_x L)\phi_0^2 \mathrm{d}x} \tag{7}$$

由无畸变条件得

$$\nabla_x L = \frac{x}{R}$$

代回(3)式，并引用 $x_{av}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \phi_0^2 \mathrm{d}x$ 得

$$R_{av} = R \tag{8}$$

另一方面，在波面无畸变条件下，径向轨道能量 E_t 等于

$$E_t = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 (\nabla_x L)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{R^2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \phi_0^2 \mathrm{d}x = \frac{x_{av}^2}{R_{av}^2} \tag{9}$$

所以，在 $z = 0$ 腰面上，

$$(E_t)_{z=0} = 0 \tag{10}$$

另一方面，由[3,6]知道，经合理选择高斯光腰半径 σ_0，光束横截面的径向能量 $E_\perp$ 等于

$$E_\perp = \frac{A}{k^2\sigma_0^2},\ A = \sum_m |c_m|^2(2m+1) \tag{11}$$

式中 c_m 为线性叠加系数，m 为厄米-高斯光束的阶数。把(5)、(6)式代入(2)得到在无波面畸变条件下

$$(E_i)_{z=0} = \frac{A}{k^2\sigma_0^2} \tag{12}$$

现在，讨论波面畸变傍轴光束。在有畸变情况下

$$R_{ar} \neq R$$

虽然在光束腰面上，不管有无畸变，R_{ar} 总等于 ∞，但有畸变时，由光束实际波面所决定的 E_t 并不等于 0，即

$$(E_t)_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2(\nabla_x L)^2 \mathrm{d}x \neq 0 \tag{13}$$

4 光束质量因子的分解

在讨论分解之前，先讨论光束整体质量评价因子与(11)式 A 的关系。

对于无波面畸变一维傍轴光束：

远场发散角

$$\beta_{z=\infty} = 2\left(\frac{x_{ar}}{z}\right) \tag{14}$$

在远场的 x_{ar} 为

$$x_{ar} = \frac{\sqrt{A}}{k\sigma_0}z$$

所以

$$\beta_{z=\infty} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{A}}{k\sigma_0}z\right)}{z} = \frac{2\sqrt{A}}{k\sigma_0} \tag{15}$$

另一方面，焦斑长度

$$d = 2(x_{ar})_{z=0} = 2\sqrt{\frac{1}{4}A\sigma_0^2} = \sqrt{A}\,\sigma_0 \tag{16}$$

把第 2 节定义的评价参数 q 代入得

$$q = \frac{k}{2}(\beta \cdot d) = A \tag{17}$$

对于波面畸变一维光束

$$\beta = \frac{2\sqrt{A}}{k\sigma_0},\ d = \sqrt{A}\,\sigma_0 \tag{18}$$

所以

$$q = \frac{k}{2}\beta d = A$$

即无论有无波面畸变，光束整体质量评价因子都等于 A，而 A 就是当今通用的质量因子 M^2[4]。

现在对 A 进行分解，由文献[3]中(18)式得

$$A = 2k|x_{ar}|\sqrt{E_\perp - \frac{x_{ar}^2}{R_{ar}^2}} \tag{19}$$

可改写成

$$A=\sqrt{4k^2x_{av}^2E_i+4k^2x_{av}^2\left(E_t-\frac{x_{av}^2}{R_{av}^2}\right)} \tag{20}$$

对于无波面畸变光束

$$E_t-\frac{x_{av}^2}{R_{av}^2}=0,\ A=\sqrt{4k^2x_{av}^2E_i} \tag{21}$$

由此可见，(20)式右边第一项是几何像差为零情况下由纯衍射所决定的光束质量，第二项是几何像差所决定的光束质量。由此，可合理引入衍射光束质量因子 A_d 和几何光束质量因子 A_g，同时考虑到虽然 A 与 z 无关，但在波面畸变即存在几何象差条件下，尚不知道因子 $x_{av}^2E_i$ 是否含变数 z，故先限制在 $z=0$ 即光束腰平面上来定义 A_d 及 A_g。而且在 $z=0$ 截面上，无论有无波面畸变，$\frac{x_{av}^2}{R_{av}^2}$ 均为零，故 A_d 与 A_g 可分别定义如下

$$A_d\equiv\left(\sqrt{4k^2x_{av}^2E_i}\right)_{z=0}\qquad A_g\equiv\left(\sqrt{4k^2x_{av}^2E_t}\right)_{z=0} \tag{22}$$

而

$$A=\sqrt{A_d^2+A_g^2} \tag{23}$$

或写成

$$M^2=\sqrt{M_d^4+M_g^4} \tag{24}$$

其中，$M_d^2\equiv A_d$，$M_g^2\equiv A_g$

附带指出，在给 A_d，A_g 下定义时，是选择光束腰平面作为参考截面的。在实际应用时，已知截面往往不在光腰平面，如何计算 A_d 和 A_g 值呢？考虑到光束经过无像差透镜之后 A 值不会变化，故可想象将一无像差透镜插入光束的已知截面，光束刚穿过透镜时，振幅分布不变，即 E_i 值和 x_{av}^2 值都不变，只有 E_t 和 R_{av}^2 值改变，若适当选择透镜焦距，使得 R_{av}^2 改变为 $R_{av}'^2=0$，E_t 改变为 E_t'，根据文献[3]第3节

$$E_t'=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta^2\phi_0^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}(\theta_k-\theta_e)^2\phi_0^2\mathrm{d}x=E_t-\frac{x_{av}^2}{R_{av}^2} \tag{25}$$

同时 $R_{av}'^2=0$，形成新的光腰面。引用(22)式，它的几何光束质量因子 A_g' 等于

$$\begin{aligned}A_g'&\equiv\left(\sqrt{4k^2x_{av}^2E_t'}\right)_{z'=0}\text{（指新光腰面）}\\&=\sqrt{4k^2x_{av}^2\left(E_t-\frac{x_{av}^2}{R_{av}^2}\right)}\end{aligned} \tag{26}$$

由于(20)式左边 A 值和右边第一项均与是否插入透镜无关，故要求右边第二项的数值在插入透镜后也不变，故可判断

$$A_g'=A_g$$

这样，就可将 A_d 及 A_g 的定义推广为(无插入透镜的已知截面)

$$A_d\equiv\left(\sqrt{4k^2x_{av}^2E_i}\right)_{\text{已知截面}}\qquad A_g\equiv\left(\sqrt{4k^2x_{av}^2\left(E_t-\frac{x_{av}^2}{R_{av}^2}\right)}\right)_{\text{已知截面}} \tag{27}$$

这里的已知截面可以是任一光束横截面。

5 结 论

本文之所以能够在光束传输中区分开衍射部分和几何部分(不同于传统的单纯几何像差分析)，关键是引用了光流体模型中的径向能量不变积分[6]。所得结果对引用微分几何方法来

讨论光束传输问题具有重要意义[7]。同时，这些物理结果在应用上非常实用。例如，在激光核聚变研究中所使用的巨型固体激光驱动器，由于光学材料不均匀、光学元件面形不平整以及光泵引起的热畸变都会导致波面畸变；同时，强光束在介质中传输又会引起非线性自聚焦现象，从而导致振幅调制。利用本文结果就可以区分开这两个方面的影响，分别求出对光束最终焦斑影响的程度。而它只要求给出光束截面的振幅及准程函分布，而这些分布可以用近场分布的CCD测量方法和哈德曼方法分别求得。

参 考 文 献

1 邓锡铭等．傍轴黎曼几何光学．Ⅰ．应用基础．中国激光，1995，A22(8)：607

2 邓锡铭．有限束宽光动力学，杭州大学出版社，1993．18

3 邓锡铭，郭　弘，曹　清．傍轴黎曼几何光学．Ⅱ．光束传输的统计行为．中国激光，1996，A23(4)：321～327

4 A. E. Siegman. *SPIE*, 1990, **1224**: 2

5 P. A. Bélanger. Beam propagation and the *ABCD* ray matrices. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(4): 196

6 邓锡铭等．傍轴光束截面的内能是一个不变量．光学学报，1983，3(5)：385

7 Hong Guo, Deng Ximing. Differential geometrical methods in the study of optical transmission (scalar theory)
Ⅰ Static transmission case. *J. Opt. Soc. Am.*, A12(3): 600
Ⅱ Time-dependent transmission case. *J. Opt. Soc. Am.*, A12(3): 607

Paraxial Riemannian Geometrical Optics
Ⅳ. Two Kinds of Beams Quality Factors

Deng Ximing　Guo Hong*　Cao Qing

(*National Laboratory on High Power Laser and Physics,*
Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

Abstract　In this paper, by using the hydrodynamical model of optics and the invariant integral of the radial component $E_{\perp}$ of the beam cross-section energy, we analyze the influences on the beam quality M^2 factor from the wave surface distortion and from the non-uniform amplitude distribution respectively, introduce two new kinds of definitions of the beam quality, and discuss the relation among these two definitions and the M^2 factor.

Key words　beam propagation, generalized Hermite-Gaussian beam, beam quality

* The author is now with South china Institute of Quantum Electronics, South China Normal University.