

激光导引星非等晕性的限制

范承玉 宋正方

(中国科学院安徽光机所, 合肥 230031)

提要 在利用激光导引星的自适应光学系统中, 焦距非等晕性是对自适应光学系统性能的主要限制, 利用湍流探测配置的孔径滤波函数导出了剩余波前畸变方差, 并依此导出了成像系统的有效直径 d_0 , 根据昆明和兴隆实测的大气湍流模型对 d_0 进行了计算, 说明了校正平移和倾斜对自适应光学系统的重要性。

关键词 激光导引星, 自适应光学, 焦距非等晕性

1 引言

在传统的地基天文望远镜系统中加入自适应光学系统(AOS), 是提高成像质量的重要手段, 但 AOS 中信标光源的获取是一个关键问题, 该信标应处于观测目标的等晕角范围内。众所周知, 在可见光和近红外范围, 等晕角是非常小的, 一般只有几个角秒, 在此范围内一般没有自然产生的导引星(NOGS)可供使用。为了解决天文观察中的导引星问题, Feinleib^[1] 在 1982 年以及 Foy 和 Labeyrie^[2] 在 1985 年分别独立地提出了在 AOS 中使用 Rayleigh 散射或钠层共振散射作为人造导引星(AGS)的概念, 此后作了不少成功的演示。由于 AGS 的高度是有限的, 来自 AGS 的球面波与来自天体的平面波, 它们在通过大气湍流到达接收孔径时所经历的路径不同, 从而出现一个非等晕区, 或存在所谓的焦距非等晕性。本文主要考虑焦距非等晕性对 AOS

的限制, 首先导出作为焦距非等晕性量度的有效直径 d_0 的表达式, 然后利用昆明和兴隆的大气湍流模式作了计算, 证明 d_0 与大气湍流的分布密切相关, 校正低阶项相位畸变对 AOS 具有重要意义。

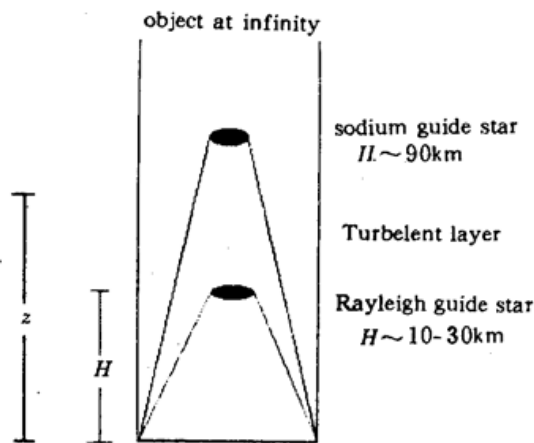


Fig. 1 Diagram of artificial guide stars

2 基本公式

根据 Fried^[3] 的分析, 对于一个圆孔径接收系统, 来自如图 1 所示的点信标光源的球面波与来自天体的平面波, 由于焦距不等晕性产生剩余

波前畸变方差可表达为

$$E^2 = (D/d_0)^{5/3} \quad (1)$$

式中 D 为接收望远镜的孔径直径, d_0 为 AOS 的有效直径。

这里的关键是要求出 E^2 , 利用接收孔径平面上的相位结构函数的系综平均, 可以比较容易地导出焦距非等晕性产生的剩余波前畸变方差的一般表达式^[4]

$$E^2 = 0.207k_0^2 \int_0^\infty C_n^2(z) \left[\int f(K)g(K,z)dK \right] dz \quad (2)$$

式中 $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ 为信标波长, z 的积分从接收孔径到感兴趣的天体, K 的积分是接收孔径平面上的二维空间。 $f(K)$ 为大气湍流谱, 采用归一化的 Kolmogorov 湍流谱

$$f(K) = K^{-11/3} \quad (3)$$

$g(K,z)$ 为表征湍流探测几何的孔径滤波函数, 对于不同的问题其形式不同。

我们首先考虑信标高度下方的剩余波前畸变方差, 按照 Sasiela^[4] 的分析, 保留平移和倾斜时, 滤波函数的形式为

$$g(K,z) = 2 \left\{ 1 - \frac{2J_1[KD(H-z)/2H]}{KD(H-z)/2H} \right\} \quad (4)$$

把(3)和(4)式代入(2)式, 并对 K 空间的方位角进行积分, 可得平移和倾斜存在情况下的畸变方差

$$E_z^2 = 2.606k_0^2 \int_0^H dz C_n^2(z) \int_0^\infty dK K^{-8/3} \left\{ 1 - \frac{2J_1[KD(H-z)/2H]}{KD(H-z)/2H} \right\} \quad (5)$$

经过一些简化计算, 最后可以得到以部分湍流矩表示的畸变方差

$$E_z^2 = 0.5007k_0^2 \sec^2 \psi (D/H)^{5/3} \mu_{5/3}^{\downarrow}(H) \quad (6)$$

这里部分 m 阶湍流矩的定义是: 对信标下部为

$$\mu_m^{\downarrow} = \int_0^H dz z^m C_n^2(z) \quad (7)$$

对于信标上部为

$$\mu_m^{\uparrow} = \int_H^\infty dz z^m C_n^2(z) \quad (8)$$

通常人们感兴趣的是平移或倾斜被校正后的情况, 根据(2)式和平移及倾斜的滤波函数, 可以单独对平移和倾斜造成的畸变方差进行计算, 并且只要从(6)式中减去平移或平移和倾斜的方差, 就可以得出平移或平移和倾斜被校正以后的剩余方差。

对于平移和倾斜的滤波函数可以写成^[4]

$$g_z(K,z) = 4v^2 \left\{ \frac{J_v(KD/2)}{KD/2} - \frac{J_v[KD(H-z)/2H]}{KD(H-z)/2H} \right\}^2 \quad (9)$$

这里的下标 Z 代表平移(P)和倾斜(T), 当 $v = 1$ 时表示平移, $v = 2$ 时表示倾斜。把(9)式代入(2)式, 对 K 空间的方位角进行积分可得

$$E_{z,Z}^2 = 1.303k_0^2 \int_0^H dz C_n^2(z) 4v^2 \int dK K^{-8/3} \left\{ \frac{J_v(KD/2)}{KD/2} - \frac{J_v[KD(H-z)/2H]}{KD(H-z)/2H} \right\}^2 \quad (10)$$

引入变量 $x = KD/2, y = (H-z)/H$ 代入上式, 并加入总和为零的附加项得

$$E_{z,Z}^2 = 1.642k_0^2 D^{5/3} \int_0^H dz C_n^2(z) I(z) \quad (11)$$

$$I(z) = \int_0^{\infty} dx x^{-14/3} \left\{ \left[J_0^2(x) - \frac{a^2 x^2}{4} \right] + \left[\frac{1}{y^2} J_0^2(xy) - \frac{a^2 x^2}{4} \right] - 2 \left[J_0(x) J_0(xy) / y - \frac{a^2 x^2}{4} \right] \right\} \quad (12)$$

(12) 式中加入附加项是为了计算平移时, 积分能够收敛, 计算平移时取 $a = 1$, 计算倾斜时取 $a = 0$ 。

按照 Sasiela^[5] 发展的 Mellin 变换法, 经过一些计算可以得出平移畸变方差

$$E_{\gamma_P}^2 = 0.0833 k_0^2 \sec \psi D^{5/3} \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) / H^2 \quad (13)$$

倾斜畸变方差为

$$E_{\gamma_T}^2 = 0.368 k_0^2 \sec \psi D^{5/3} \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) / H^2 \quad (14)$$

(6) 式减去 (13) 式得出平移被校正后的剩余畸变方差为

$$E_{\gamma_{PR}}^2 = k_0^2 \sec \psi D^{5/3} [0.5007 \mu_{5/3}^{\dagger}(H) / H^{5/3} - 0.0833 \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) / H^2] \quad (15)$$

(6) 式减去 (13) 和 (14) 式得出平移和倾斜被校正后的剩余畸变方差为

$$E_{\gamma_{PTR}}^2 = k_0^2 \sec \psi D^{5/3} [0.5007 \mu_{5/3}^{\dagger}(H) / H^{5/3} - 0.4513 \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) / H^2] \quad (16)$$

对于信标上部湍流的影响, 可以利用 Noll^[6] 提出的 Zernike 模式来获得剩余相位畸变方差。对于平移被校正后可获得

$$E_{\gamma_{PR}}^2 = 1.0299 (D/r_d^{\dagger})^{5/3} \quad (17)$$

这里大气相干长度 r_d^{\dagger} 是从信标高度以上进行计算的, 表示成

$$r_d^{\dagger} = [0.423 k_0^2 \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H)]^{-3/5} \quad (18)$$

因此

$$E_{\gamma_{PR}}^2 = 0.436 k_0^2 \sec \psi D^{5/3} \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) \quad (19)$$

同理平移和倾斜被校正后的剩余方差为

$$E_{\gamma_{PTR}}^2 = 0.134 \left(\frac{D}{r_d^{\dagger}} \right)^{5/3} \quad (20)$$

即

$$E_{\gamma_{PTR}}^2 = 0.057 k_0^2 \sec \psi D^{5/3} \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) \quad (21)$$

这样把 (15) 式和 (19) 式相加, 可得校正平移后, 焦距非等晕性导致的畸变方差为

$$\begin{aligned} E_{PR}^2 &= E_{\gamma_{PR}}^2 + E_{\gamma_{PR}}^2 \\ &= k_0^2 \sec \psi D^{5/3} [0.436 \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) + 0.5007 \mu_{5/3}^{\dagger}(H) / H^{5/3} - 0.0833 \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) / H^2] \end{aligned} \quad (22)$$

同理把 (16) 式和 (21) 式相加, 得到平移和倾斜被校正后的剩余波前畸变方差

$$\begin{aligned} E_{PTR}^2 &= E_{\gamma_{PTR}}^2 + E_{\gamma_{PTR}}^2 \\ &= k_0^2 \sec \psi D^{5/3} [0.057 \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) + 0.5007 \mu_{5/3}^{\dagger}(H) / H^{5/3} - 0.4513 \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) / H^2] \end{aligned} \quad (23)$$

把 (22) 式和 (23) 式分别代入 (1) 式即可得校正平移后 d_{OPR} 或校正平移和倾斜后 d_{OPTR} 的表达式如下:

$$d_{OPR} = k_0^{-6/5} \cos^{3/5} \psi [0.436 \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) + 0.5007 \mu_{5/3}^{\dagger}(H) / H^{5/3} - 0.0833 \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) / H^2]^{-3/5} \quad (24)$$

$$d_{OPTR} = k_0^{-6/5} \cos^{3/5} \psi [0.057 \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) + 0.5007 \mu_{5/3}^{\dagger}(H) / H^{5/3} - 0.4513 \mu_{\downarrow}^{\dagger}(H) / H^2]^{-3/5} \quad (25)$$

对于包括平移和倾斜的 d_0 表达式, 可以对 (6) 式稍作变化, 把部分大气湍流矩表示成全程大气湍流矩, 再代入 (1) 式可得其表达式

$$d_0 = k_0^{-6/5} \cos^{3/5} \psi \left(\frac{0.5007 \mu_{5/3}^{\dagger}}{H^{5/3}} \right)^{-3/5} \quad (26)$$

3 大气湍流模型

1992 年 11 月安徽光机所曾宗泳等同志利用球载探空仪在昆明、北京等地对 $C_n^2(h)$ 的高度分布作了测量,取得了较多的资料,我们对昆明的测量资料进行了分析,并利用 Hufnagel 湍流模型进行了拟合,Hufnagel 模型如下

$$C_n^2(h) = a_1 h^{\alpha} \exp\left(-\frac{h}{H_1}\right) + a_2 \exp\left(-\frac{h}{H_2}\right) + a_3 \exp\left(-\frac{h}{H_3}\right) \quad (m^{-2/3}) \quad (27)$$

式中 $a_1, a_2, a_3, H_1, H_2, H_3$ 和 α 均为拟合常数, h 为离地面高度,单位为 m。根据测量时间的不同分成清晨、夜间和全部平均三种模型,具体的拟合参数见表 1,其中兴隆的数据取自文献 [7],图 2 给出了昆明平均情况的探测数据和模式拟合曲线。

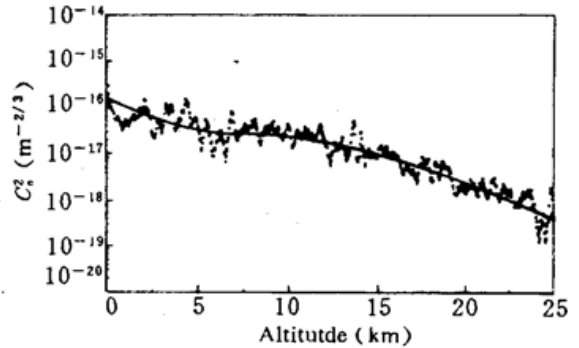


Fig. 2 The $C_n^2(h)$ vs altitude at Kunming (in Nov. 1992)
The squares, the measured data; solid curve, the fitted data

Table 1 The parameters of vertical distribution of $C_n^2(h)$

Site	Date	a_1	$a_2(m^{-2/3})$	$a_3(m^{-2/3})$	$H_1(m)$	$H_2(m)$	$H_3(h)$	α
Kunming	Average	1.0E-38	1.5E-16	0	1600	2800	∞	6
	Morning	3.07E-38	2.5E-16	0	1500	2150	∞	6
	Night	3.41E-40	5.0E-16	0	1750	5000	∞	6
Xinglong	Average	12.52E-53	9.1E-16	2.0E-15	990	1305	520	10
	Morning	19.36E-53	2.7E-16	8.0E-15	971	2200	501	10
	Night	9.68E-53	8.1E-16	3.0E-15	990	2800	812	10

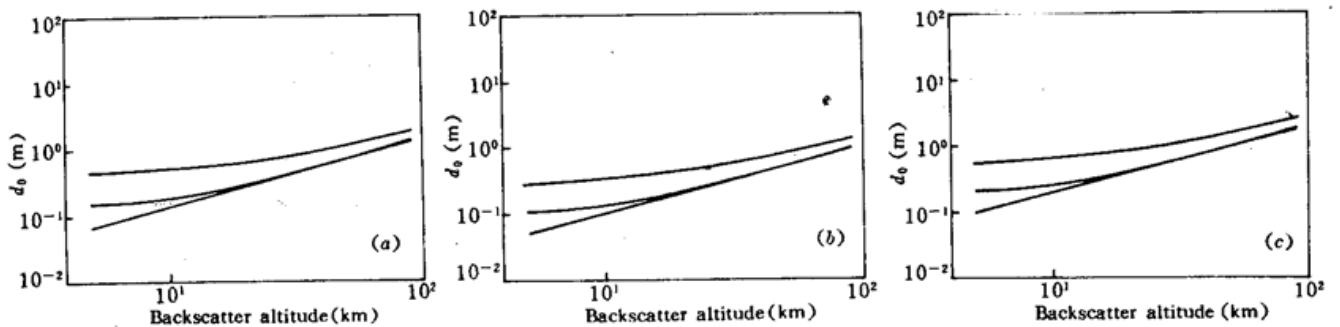


Fig. 3 Adaptive optics system effective diameter d_0 plotted as a function of laser beacon altitude for various turbulence models (a), (b) and (c). The results associated with the turbulence model Kunming-average, Xinglong-average, HV5/7, respectively. In each figure the curves correspond to propagation at zenith with an operating wavelength equal to $0.5 \mu m$. The upper curve in each figure is for the case in which the tilt and the piston are corrected. The middle is for the case in which the piston is corrected. The lower is for the case in which the piston and the tilt are included

4 计算结果

利用上节介绍的昆明的大气湍流模型以及 HV5/7 模式,我们对 d_0 进行了计算,对于昆明

和兴隆都利用了平均湍流模型进行计算,为了比较也计算了 HV5/7^[9] 模式,这里图 3 (a), (b), (c) 分别对应昆明平均、兴隆平均、HV5/7 湍流模式的结果,在计算中假设天顶角 ψ 为零,波长 λ 为 $0.5 \mu\text{m}$,顶部曲线来自公式(25),对应着平移和倾斜被校正,中间曲线来自公式(24),对应着平移被校正,底部曲线来自公式(26),平移和倾斜被包括在波前畸变中。从这些结果我们可以看出 d_0 的数值与 $C_0^2(h)$ 的分布是密切相关的,而且依赖于 AGS 的高度和校正的内容,例如对于昆明的湍流模型,若 AGS 的高度为 15 km,未作校正时 d_0 不足 0.22 m,而作了平移和倾斜校正后 d_0 即增加到 0.58 m 左右,这就是说使用 0.6 m 孔径的望远镜以 15 km 高度的 Rayleigh 散射作为 AGS 校正平移和倾斜后可以使剩余波前畸变方差从 5.3 rad^2 减小为 1.06 rad^2 ,或者说这时系统的 Strehl 比 ($SR = \exp\{-E^2\}$) 达到 0.35,而未校正时 Strehl 比仅为 0.0049。Close 和 McCarthy, Jr^[9] 已证明在 $SR \sim 0.14$ 时就可得到接近衍射极限的星像,其半峰值宽度为 $0.19''$,因此上述系统在昆明要获得高质量的星像是完全可能的。

最后顺便指出,上述计算是对可见光而言的。由于 d_0 和 $\lambda^{6/5}$ 成比例,对于其他波长,只要乘上一比例系数即可。因此在近红外以远的波长上 AOS 校正的效果更加明显。

参 考 文 献

- 1 J. Feinleib. Proposal 82-P4. Adaptive Optics Associates, Cambridge, Mass., 1982
- 2 R. Foy, A. Labeyrie. Feasibility of adaptive telescopes with laser probe, *Astron. Astrophys.*, 1985, 152 : 129~131
- 3 D. L. Fried, J. F. Belsher. Analysis of fundamental limits to artificial-guide-star adaptive-optics-system performance for astronomical imaging. *J. Opt. Soc. Am.*, 1994, A11(1) : 277~287
- 4 R. J. Sasiela, J. D. Shelton. Transverse spectral filtering and Mellin transform techniques applied to the effect of outerscale on tilt anisoplanatism. *J. Opt. Soc. Am.*, 1993, A10(4) : 646~660
- 5 R. J. Sasiela, J. D. Shelton. Mellin transform techniques applied to integral evaluation; Taylor series and asymptotic approximation. *J. Math. Phys.*, 1993, 34 : 2572~2617
- 6 R. J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, 66(3) : 207~211
- 7 吴晓庆,曾宗泳,马成胜等. 兴隆整层大气湍流分析,量子电子学,1996,待发表
- 8 R. E. Hufnagel. Variation of atmospheric turbulence, in Digest of Topical Meeting on optical propagation through turbulence. Optical Society of American, Washington, D. C., 1974. WA1
- 9 L. M. Close, D. W. McCarthy, Jr.. High-resolution imaging with a tip-tilt Cassegrain secondary, *PASP*, 1994, 106 : 77~87

The Limit of Anisoplanatism to Laser-guide-stars

Fan Chengyu Song Zhengfang

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031)

Abstract The main limit for a laser-guide-star adaptive-optics-system is the focal anisoplanatism. Firstly, based on the filter function of the atmospheric turbulence sensing geometry, the variance of the residual wave-front distortion resulting from focal anisoplanatism was derived, then the effective diameter d_0 of the imaging system was derived. d_0 was calculated according to the atmospheric turbulence model in Kunming and Xinglong. The calculation shows that the correction of the piston and the tilt is important for the adaptive optics system.

Key words laser-guide-star, adaptive optics, focal anisoplanatism