

加光阑的贝塞尔光束的空间频谱和滤波

蒋志平 刘泽金 陆启生 赵伊君

(国防科技大学应用物理系, 长沙 410073)

提要 计算了加光阑贝塞尔光束的空间频谱,从空间频谱的角度讨论了加光阑贝塞尔光束的传输。得到近似无衍射光束的判据:空间频谱存在非零频主极大且占主要能量的频谱较窄。通过空间滤波可改善光束的传输性质。

关键词 贝塞尔光束,光阑,空间频谱,滤波

1 引言

对“无衍射”光束-贝塞尔光束的兴趣主要是基于两个方面:一是理论方面的,“无衍射”或“超衍射”光束是人们一直追求的,贝塞尔光束为人们展示了一种可能;另一方面是其应用前景,因为一个极细的中心主极大可传输相当远的距离基本上不发生变化,可望在超精密准直、大深径激光打孔、通讯及能量传输等方面获得应用。因此,自 Durnin 等人于 1987 年首次报道贝塞尔光束的实验以来^[1~3],在光学界引起了极大的兴趣,对其产生、传输、应用等进行了很多研究,目前仍有大量的文章发表^[4~8]。

衍射是光的一种本质属性,是任何波动现象所不可逾越的,从本质上来说,“无衍射”或“超衍射”光束是不存在的,贝塞尔光束也不例外。贝塞尔光束是波动方程的一个解,说它无衍射是指它不随传输距离而改变,好象无衍射,其实它的这种性质恰恰是衍射的结果,只不过这时的衍射很微妙。

贝塞尔光束的另一特点是其总能量为无限大,这意味着在物理上理想的贝塞尔光束是不存在的。在物理上有意义的贝塞尔光束都是在理想的贝塞尔光束上加了某种光阑限制的^[3]。光阑可以是硬边光阑(小孔),也可以是软边光阑(如高斯光阑,这就是高斯-贝塞尔光束^[6])。加光阑的贝塞尔光束同样具有“无衍射”的性质:在一定的传输距离内其分布基本不变。本文从空间频谱的角度研究加光阑的贝塞尔光束的传输,这为理解加光阑的贝塞尔光束的传输提供了一幅物理图像,在此基础上提出用空间滤波的方法来改善其传输特性。

2 加光阑贝塞尔光束的空间频谱

贝塞尔光束是柱对称的,设 $f(r)$ 为光阑函数,贝塞尔函数用 $J_0(ar)$ 表示,则空间频谱由零阶汉克尔变换给出^[9]:

$$G(\rho) = 2\pi \int_0^\infty f(r) J_0(\alpha r) J_0(2\pi r \rho) r dr \tag{1}$$

当 $f(r) = 1$ (即无光阑) 时, (1) 式给出理想的贝塞尔光束的空间频谱为

$$G(\rho) = \frac{1}{\alpha} \delta\left(\frac{\alpha}{2\pi} - \rho\right) \tag{2}$$

(2) 式意味着理想的贝塞尔光束的空间频谱为一个锥面, 这就是 Gori 的解释^[6]; 贝塞尔光束可以看作是一系列平面波的叠加, 这些平面波的波矢量都分布在以传播方向 z 轴为中心的一个锥体表面上, 如图 1(a) 所示, 图 1(b) 是空间频谱。加光阑后, 频谱要复杂得多。设 $F(\rho)$ 是 $f(r)$ 的汉克尔变换, 则加光阑后的空间频谱由卷积给出^[9]

$$G(\rho) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F(\xi) \frac{1}{\alpha} \delta\left(\frac{\alpha}{2\pi} - R\right) \xi d\xi d\theta \tag{3}$$

式中

$$R = \sqrt{\rho^2 + \xi^2 - 2\rho\xi\cos\theta}$$

从形式上来看 (3) 式并不比 (1) 式简单, 但是可由它得出一些有用的结果。由 (3) 式, 有贡献的 ξ, θ 必须满足 $R = \alpha/2\pi$, 即必须有

$$\xi = \rho\cos\theta \pm \sqrt{(\alpha/2\pi)^2 - \rho^2\sin^2\theta} \tag{4}$$

$$G(0) = 2\pi F(\alpha/2\pi) \tag{5}$$

所以

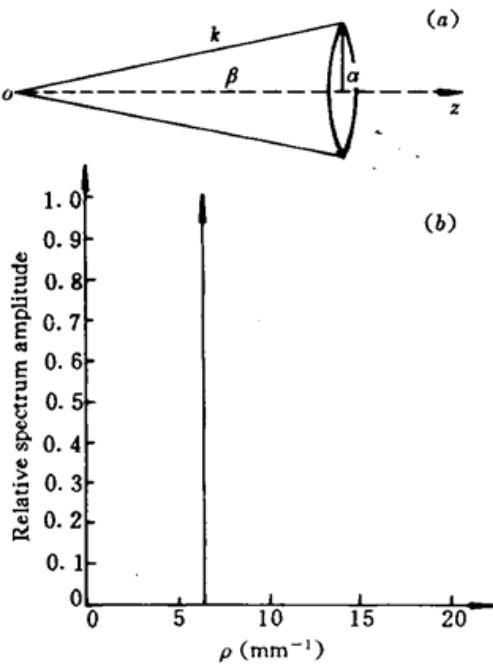


Fig. 1

(a) the wave vectors of the ideal Bessel beam;
(b) the space spectrum ($\alpha = 40 \text{ mm}^{-1}$)

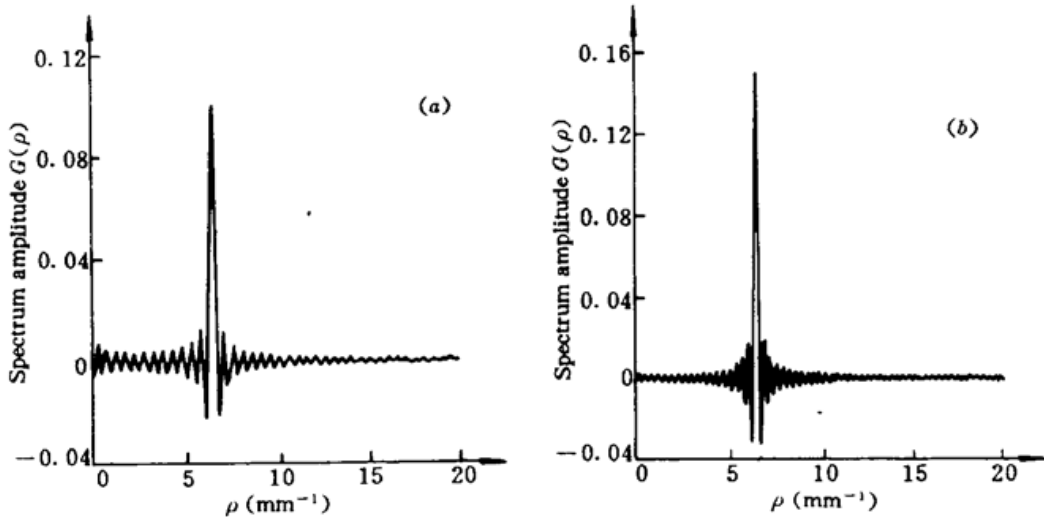


Fig. 2 The space spectra of circular truncated Bessel beams with $\alpha = 40 \text{ mm}^{-1}$ and the radii
(a) 2 mm; (b) 3 mm

硬边光阑及高斯光阑是两种用得最多的光阑, 我们计算了有关的空间频谱。取 $\alpha = 40 \text{ cm}^{-1}$, 图 2 是加硬边光阑时的频谱, 图 2(a), (b) 对应的光阑半径分别为 2 mm 和 3 mm。图 3 是加高斯光阑时的空间频谱, 图 3(a), (b) 对应的高斯光阑的半径分别为 2 mm 和 3 mm。频谱的特点是

有一个强度较大的峰值,其位置 ρ_{\max} 由 $\alpha/2\pi$ 给出,其宽度反比于光阑的直径,而其高度正比于光阑的直径。贝塞尔光束的中心主极大宽度为 $1/\alpha$,因此这个宽度越小, ρ_{\max} 越大。

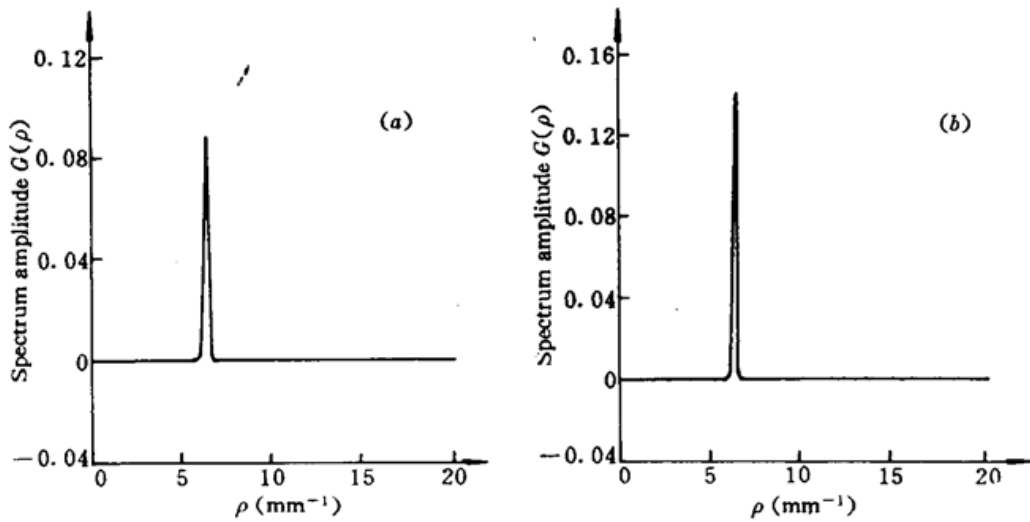


Fig. 3 The space spectra of the Gauss-Bessel beams with $\alpha = 40 \text{ mm}^{-1}$ and the Gaussian radii (a) 2 mm, (b) 3 mm

我们曾计算了贝塞尔光束经过角锥变换后的传输,发现负角锥可提高光轴上的光强,但光束基本不变的距离 z_{\max} 减小;正角锥的作用正好相反,轴上光强下降,而 z_{\max} 增大^[10]。因此,角锥不仅可用于产生贝塞尔光束^[7],也是变换贝塞尔光束的有力工具。角锥的透过率由下式给出:

$$T(r) = \exp(\pm i\gamma r) \quad (6)$$

正号对应负角锥,负号对应正角锥。此时频谱应为:

$$G(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) \exp(\pm i\gamma r) J_0(\alpha r) J_0(2\pi\rho r) r dr \quad (7)$$

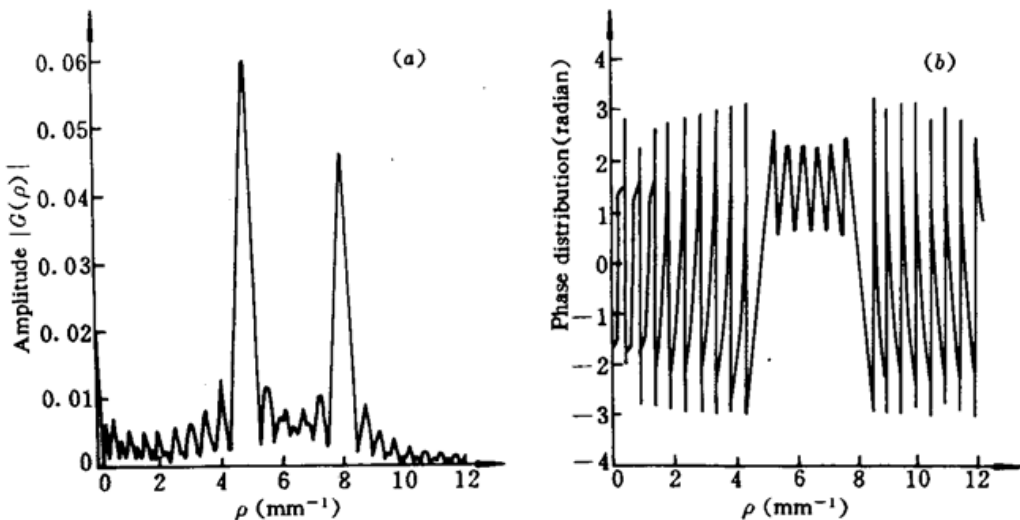


Fig. 4 The space spectra of the circular truncated Bessel beams passing through a negative axicon. (a) absolute amplitude distribution, (b) phase distribution. $\alpha = 40 \text{ mm}^{-1}$, the circular radius is 2 mm, $\gamma = 10 \text{ mm}^{-1}$

(7)式说明贝塞尔光束经角锥变换后其频谱为复数。在频谱面上正负角锥的强度分布是相同的,但相位分布相差一个负号,这一点对理解正负角锥的作用是重要的。图4是图2(a)加硬边

光阑贝塞尔光束经负角锥后的空间频谱, $\gamma = 10 \text{ mm}^{-1}$ 。图 4(a) 是 $|G(\rho)|$, 图 4(b) 是位相分布。加角锥后, 频谱由一个主峰变为两个主峰, 主峰的位置为角锥的频率与原贝塞尔光束的频率的和频与差频, 因为两者是乘的关系。

注意到透镜的焦平面即给出光束的频谱, 图 1(b), 图 2, 图 3 给出的实际上是透镜焦平面的振幅分布。图 1(b) 的结果很有意思, 它意味着理想的贝塞尔光束是聚焦不起来的。当然, 实际上不可能对理想的贝塞尔光束聚焦, 因为这要求透镜的半径为无限大, 然而图 2, 图 3 表明越接近理想的贝塞尔光束, 轴上光强越小。(5) 式给出加光阑贝塞尔光束的焦点上的光振幅, 一般说来光阑孔径越大, α 越大, 焦点处的光振幅越小。文献[8]讨论贝塞尔光束的聚焦, (5) 式可作为其补充。

3 从空间频谱来讨论加光阑贝塞尔光束的传输

理想的贝塞尔光束的空间频谱是 δ 函数, 光阑的作用激发出许多其它空间频率的贝塞尔光束, 加光阑的贝塞尔光束的传输可看作是这许多贝塞尔光束干涉的结果(按图 2, 图 3 的频谱加权)。例如, 光轴上的振幅可由下式给出:

$$E(z) = \int_0^{\infty} G(\rho) \exp(i\beta z) \rho \, d\rho \quad (8)$$

式中, $\beta = \sqrt{k^2 - (2\pi\rho)^2} \approx k - (2\pi\rho)^2/2k$, k 是波数。(8) 式可写为:

$$E(z) = \exp(ikz) \int_0^{\infty} G(\rho) \exp\left[-i \frac{(2\pi\rho)^2}{2k} z\right] \rho \, d\rho \quad (9)$$

(9) 式非常类似于非严格单色光的部分相干光的干涉^[11]。光轴上振幅基本不变的距离 z_{\max} 取决于 $G(\rho)$ 的有效宽度 $\Delta\rho_{\text{eff}}$, $\Delta\rho_{\text{eff}}$ 越小, z_{\max} 越大, 反之亦然。其所以说有效宽度, 是因为 $G(\rho)$ 较复杂, 不能象高斯函数那样能简单地给出宽度来。

对理想的贝塞尔光束, 其频谱 $G(\rho)$ 为 δ 函数[(3) 式], 由(11) 式给出的轴上光振幅是常数。当有光阑时, $G(\rho)$ 不再是 δ 函数, 而是有一分布, $E(z)$ 是距离的函数。容易看出, 改变频谱分布 $G(\rho)$, 将改变 $E(z)$ 。对于硬边光阑(小孔) 截断的贝塞尔光束, $E(z)$ 有图 5(a) 所示的曲线形状($\alpha = 40 \text{ mm}^{-1}$, 孔径为 2 mm), 虽然在距离 z_{\max} 内 $E(z)$ 基本不变, 但是 $E(z)$ 是振荡的, 越接近 z_{\max} , $E(z)$ 振荡得越利害。在实际应用中希望 $E(z)$ 不变(如激光打孔), 或者希望 z_{\max} 大一些(如激光准直), 这可以通过对空间频谱进行滤波的方法来实现。例如求解下式

$$\int_0^{\infty} G(\rho) \exp\left[-i \frac{(2\pi\rho)^2}{2k} z\right] \rho \, d\rho = \begin{cases} 1, & z \leq z_{\max} \\ 0, & z > z_{\max} \end{cases} \quad (10)$$

(10) 式是理想化的形式, 不大可能在严格意义上求解, 可在最小方差意义上来求解。

(9) 式的指数因子表明, 当 z 较小时轴上光强的振荡来源于大的空间频谱分量, 简单地滤去高频分量可降低轴上光强的振荡, 这可由图 5(b) 看出。图 5(b) 是滤去了空间频率大于 7.0 mm^{-1} 的光后的结果, 轴上光强的振荡频率大大降低。压窄空间频谱分布 $G(\rho)$ 可增大 z_{\max} , 如图 5(c) 所示, 当然这要以光强下降为代价。此外, (9) 式可写作:

$$E(z) = \int_0^{\infty} |G(\rho)| \exp\left[i\varphi(\rho) - i \frac{(2\pi\rho)^2}{2k} z\right] \rho \, d\rho \quad (11)$$

在(11) 式中略去了对光强不起作用的相因子 $\exp(ikz)$, $\varphi(\rho)$ 是 $G(\rho)$ 的相因子。(11) 式中的第

2 个相因子 $[(2\pi\rho)^2/2k]z$ 意味着高的空间频率的光经历的相位变化大于低的空间频率的光, 相因子 $\varphi(\rho)$ 预先在高低空间频率光之间加上一个相位差。注意到角锥的空间频谱的位相分布, 很容易理解角锥对贝塞尔光束的变换作用。例如图 4 的负角锥的频谱能量主要集中在低频峰 $(\alpha - \gamma)/2\pi$ (约 4.77 mm^{-1}) 和 高频峰 $(\alpha + \gamma)/2\pi$ (约 7.96 mm^{-1}) 处的两个峰上 [图 4(a)], 从相位分布来看, 4.77 mm^{-1} 处是高频滞后低频超前, 7.96 mm^{-1} 处则相反。因此 4.77 mm^{-1} 处频谱的相位 $\varphi(\rho)$ 使得在更大的距离内 (11) 式的相因子不超过 π , 因而延长了 z_{\max} 。通俗地说就是跑得慢的先跑, 跑得快的后跑, 这样能保持更大的基本同相的距离。 7.96 mm^{-1} 处的频谱峰的情况则相反, 跑得快的先跑, 跑得慢的后跑, 很快就相消干涉而不起作用。由于起作用的频谱峰的空间频率小于未加负角锥时的值, 所以加上负角锥后光束的中央主极大宽度将比原宽度要大 (该宽度约为 $1/\alpha$)。正角锥的作用正好相反。

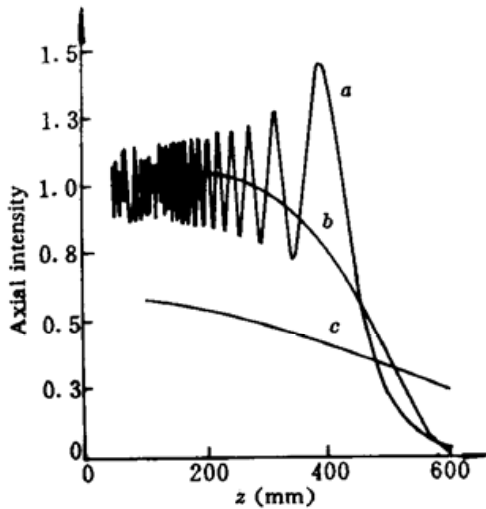


Fig. 5 The axial intensity distributions.

- (a) circular truncated Bessel beam, $\alpha = 40 \text{ mm}^{-1}$, radius is 2 mm,
 (b) after low-pass filtering of (a), cut-off frequency 7.0 mm^{-1} ,
 (c) after band-pass filtering of (a), pass band is $626 \sim 6.48 \text{ mm}^{-1}$

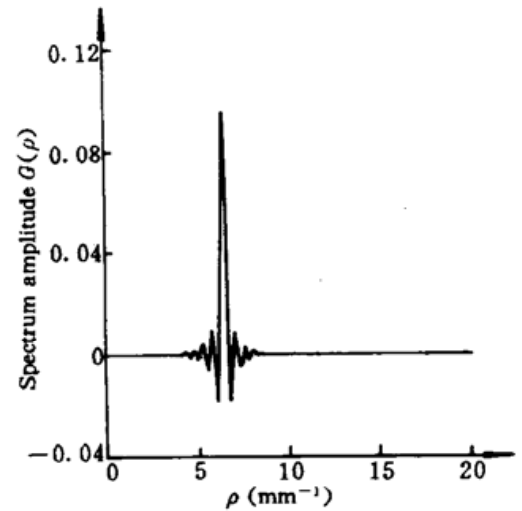


Fig. 6 The space spectrum of the Super-Gauss-Bessel beam [Eq. (15)], $\alpha = 40 \text{ mm}^{-1}$, $w = 2 \text{ mm}$

(9) 式告诉我们, 若 $G(\rho)$ 在 $\rho = \rho_{\max}$ 处有一峰值, 且有效宽度为 $\Delta\rho_{\text{eff}}$, 当 ρ_{\max} 远大于 $\Delta\rho_{\text{eff}}$ 时, 则 $E(z)$ 基本不变的距离 z_{\max} 大致由下式给出:

$$\frac{4\pi^2\rho_{\max}\Delta\rho_{\text{eff}}}{k} z_{\max} \approx \pi \quad (12)$$

对加圆孔光阑的贝塞尔光束的情况, $\rho_{\max} = \alpha/2\pi$, $\Delta\rho_{\text{eff}}$ 可认为是圆孔第一暗环对应的频率, 即取 $\Delta\rho_{\text{eff}} \approx 1/D$ 是合理的选择, D 是孔径。所以有:

$$z_{\max} \approx \pi D/\alpha\lambda \quad (13)$$

这就是文献[2]给出的结果。当然, 上面 $\Delta\rho_{\text{eff}}$ 的选择有些随意性, 但这种选择是合理的, 说明从空间频谱的角度讨论加光阑贝塞尔光束的传输是合理的。

我们可以得出另外一个结论。对高斯光束等缓变光束, $\rho_{\max} \approx 0$, 此时不能用 (12) 式。应该为

$$\frac{(2\pi\Delta\rho_{\text{eff}})^2}{2k} z_{\max} \approx \pi \quad (14)$$

比较 (14), (12) 式不难看出加光阑高斯光束轴上光强基本不变的距离一般远大于加光阑的贝

塞尔光束,因为轴上光强的变化情况基本上反映了光束的扩散情况,因此,我们可得出结论:贝塞尔光束的传输性质比高斯光束差。此结论似乎出人意料,但是正如 Sprangle 和 Hafizi 指出的那样^[12],Durnin 是取高斯光束的半径等于贝塞尔光束中心主极大的半径才得出后者有较大的“无扩散”距离的,实际上应将高斯光束的半径取为整个贝塞尔光束的尺寸,这样前者有较大的“无扩散”距离。既然如此,如何理解加光阑贝塞尔光束的“无衍射”特性?我们认为在谈到贝塞尔光束的“无衍射”特性时主要是指它的较细的中心主极大有较大的“不扩散”距离(例如与同尺寸的高斯光束相比)。要具有这种“无衍射”特性,其空间频谱应满足如下两点:1. 占主要能量的光的空间频谱足够高,这样才有可能存在足够细的中央主极大;2. 空间频谱比较集中,这样才能保证有较大的“无衍射”距离。(12)式指出“无衍射”距离 z_{\max} 与 ρ_{\max} 和 $\Delta\rho_{\text{off}}$ 成反比。

4 空间滤波

此处空间滤波有两种含义,一是普通的空间滤波,例如常用的 $4f$ 光学系统,通过对入射的加光阑的贝塞尔光束的滤波,消除(减弱)光强的振荡或增大 z_{\max} ;另一个含义是贝塞尔光束的产生。普通的空间滤波上面已作了一些讨论,不再赘述,这里讨论一下贝塞尔光束的产生。

给定一光束,通过傅里叶变换可得其空间频谱;同样给定频谱通过傅里叶变换可得其对应的光束。理想的贝塞尔光束的频谱是宽度为零的亮环,因此对细光环作傅里叶变换可得近似的贝塞尔光束,Durnin 等人的首次演示实验就是用这种方法产生贝塞尔光束的^[3]。对入射平面波加适当的空间滤波器可得到所需的频谱分布,可以用这种方法来产生所需的截断的贝塞尔光束。例如,计算表明如下的超高斯贝塞尔(SGB)光束在一定的传播距离内是“真正的”无衍射光束,其强度分布的变化远小于硬孔截断的贝塞尔光束,可以说是不变的^[13]:

$$U^{\text{SGB}}(r) = \exp\left[-\left(\frac{r}{w}\right)^{13}\right] J_0(\alpha r) \quad (15)$$

我们可以计算出(15)式的频谱,如图6,取 $\alpha = 40 \text{ mm}^{-1}$, $w = 2 \text{ mm}$,其频谱是实的,可通过照相、空间光调制器等方法做出相应的滤波器,再加一简单的透镜即可实现超高斯贝塞尔光束。

5 结 论

贝塞尔函数是亥姆霍兹方程的解,理想的贝塞尔光束的空间频谱是 δ 函数(由于有柱对称实际上是环面),加光阑使得空间频谱扩展,产生了其它空间频率的贝塞尔光束,加光阑后的场是这些贝塞尔光束的相干叠加。在 z_{\max} 内轴上光强的振荡来源于远离中心空间频率的贡献,滤去这些空间频率的光可消除轴上光强的振荡,这对某些应用(如激光打孔)是有利的。另外,加光阑的贝塞尔光束的中心主极大基本不变的距离 z_{\max} 主要由光阑的夫琅和费衍射主极大的宽度决定,压窄该宽度可增大 z_{\max} 。从空间频谱的角度易于理解角锥对加光阑贝塞尔光束的作用。对空间频谱的滤波可以是振幅滤波,也可以是相位滤波(如角锥的情形)。从空间滤波的角度可产生所需的加光阑的贝塞尔光束,如超高斯贝塞尔光束,不失为一种简单的方法。

参 考 文 献

- 1 J. Durnin, J. J. Miceli, J. H. Eberly. Diffraction-free beams. *J. Opt. Soc. Am.*, 1986, A3: 128
- 2 J. Durnin. Exact solutions of nondiffracting beams I, The scalar theory. *J. Opt. Soc. Am.*, 1987, A4: 651

- 3 J. Durnin. Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**: 1499
- 4 R. M. Herman, T. A. Wiggins. Production and uses of diffractionless beams. *J. Opt. Soc. Am.*, 1991, **A8**: 932-942
- 5 L. C. Laycock, S. C. Webster. Bessel beams; their generation and application. *GEC J. Res.*, 1992, **10**: 36~51
- 6 F. Gori, G. Guattari, C. Padovani. Bessel-Guass beams. *Opt. Commun.*, 1987, **64**: 491~495
- 7 G. Scott. Efficient generation of nearly diffraction-free beams using an axicon. *Opt. Eng.*, 1992, **31**: 2640~2646
- 8 黄文龙, 吕百达, 叶一东等. 有限束宽聚焦贝塞尔-高斯光束轴上的光强分布. *中国激光*, 1995, **A22**(4): 285
- 9 李景镇主编. 光学手册. 西安: 陕西科学技术出版社, 1986(第一版). 214~215, 223
- 10 Jiang Zhiping, Lu Qisheng, Liu Zejin. Propagation of apertured Bessel beams. accepted in *Appl. Opt.*,
- 11 M. 玻恩, E. 沃尔夫. 光学原理. 北京: 科学出版社, 1985(第二版). 415
- 12 P. Sprangle, B. Hafizi. Comment on nondiffracting beams. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**: 837
- 13 Jiang Zhiping. Super-Gaussian-Bessel beam. submitted to *Opt. Commun.*,

Space Spectrum and Filtering of Apertured Bessel Beam

Jiang Zhiping Liu Zejing Lu Qisheng Zhao Yijun

(Department of Applied Physics, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract The Space spectra of the apertured Bessel beam are calculated. The propagation of the apertured Bessel beam is discussed from the view of space spectrum. The criteria of the nearly diffraction-free beam is; the space spectrum has a non-zero major maximum and the spectrum width are narrow. The propagation feature can be improved through space filtering.

Key words Bessel beam, aperture, space spectrum, filtering