

# 一种任意图形编码的 $(0, \pi)$ 型 二维位相光栅的设计\*

桑涛 廖江红 卢振武 赵晶丽 郑宣明 翁志成

(中国科学院长春光机所应用光学国家重点实验室, 长春 130022)

**提要** 基于分析和比较各种编码图形的二维二值位相光栅的优缺点, 提出了一种设计任意图形编码的二值位相光栅的方法。该方法主要分为两步, 首先以获得最高衍射效率为基准, 寻求任意图形编码的二维二值位相光栅的初始结构, 然后采用一种迭代算法优化初始结构获得期望的光强分布。设计了7个可等强分束的二维二值位相光栅, 其衍射效率均大于80%, 均匀性偏差均小于0.01%。

**关键词** 光栅, 衍射

## 1 引言

为了获得具有高衍射效率的二维光栅, 人们设计了多种纯位相光栅, 可分为连续位相光栅 (continuous phase grating, 简记为CPG)<sup>[1]</sup>, 多台阶位相光栅 (multiple phase grating, 简记为MPG)<sup>[2]</sup>, 二值位相光栅 (binary phase grating, 简记为BPG)<sup>[3]</sup>。从理论上讲, CPG具有最高的衍射效率, 但目前因其制作困难, 加工费用昂贵而难以接受, 对于MPG, 其制作需要多次对准, 而对准误差是其瓶颈, 因此它的均匀性一般不如BPG。从加工角度考虑, 我们自然愿意选择结构简单的BPG。

为了设计二维BPG, 人们提出了多种二值位相编码方案<sup>[3]</sup>, 它们包括可分离变量型 (separable) 和不可分离变量型 (nonseparable) 两类。一般来讲可分离变量型因直接利用一维的结果而设计最为简单, 但就衍射效率而言, 它明显劣于后一类型。对于不可分离变量型的文献已报道的主要有正方形 (square-geometry)<sup>[3,4]</sup>、条形 (strip-geometry)<sup>[5,3]</sup> 和梯形 (trapezoid-geometry)<sup>[3]</sup> 三种编码方案。由于它们依次呈包含关系, 故光栅衍射效率依次提高。

本文建议了一种设计任意图形 (arbitrary-geometry) 编码的方法。该方法主要分为两步: 首先以获得最高衍射效率为基准, 寻求二维二值位相光栅的初始结构, 然后采用一种迭代算法优化初始结构获得期望的光强分布。

本文的第二部分将给出我们的理论分析, 并提出优化标准及优化方法; 在第三部分给出优化结果; 第四部分作最后总结。

\* 本工作曾获得“863”青年基金、中国科学院基础局研究基金和长春光机所应用光学国家重点实验室基金的支持。

## 2 基本理论

ABPG 的特点是每个光栅周期内的二值位相结构采用了任意图形的编码,如何表达这种任意性的图形是设计 ABPG 的首要问题。

解决该问题的可能方法之一就是采用大量的条形<sup>[5]</sup>或梯形<sup>[3]</sup>小块来逐点逼近这种图形,但因为计算量会随优化变量的增加而呈指数上升,因此这种方法难以获得较为理想的结果。

本文提出的方法是采用谱面上的具有厄米对称性  $[(0, \pi)$  型位相光栅的特征<sup>[2]</sup>] 的虚拟阵列点源来表示 ABPG 的光栅转移方程 (grating transfer function)  $t(x, y)$ ,  $[(x, y)$  是光栅面的笛卡尔坐标], 该方法的优点是能够以最少的参数来表达光栅周期内的具有任意图形的  $(0, \pi)$  型二值位相结构, 可供优化的参数是谱面上虚拟阵列点源的振幅大小和位相, 因此我们称这种方法为“虚拟场调制法”。

现在设  $A(m, n)$ ,  $\phi(m, n)$  分别表示谱面上第  $(m, n)$  级点源的振幅大小和位相, 其中  $A(m, n)$  是期望的而固定不变,  $\phi(m, n)$  可自由变化, 上述厄米对称性可表示为

$$\begin{cases} A(-m, -n) = A(m, n) \\ \phi(-m, -n) = -\phi(m, n) \end{cases} \quad (1)$$

现将谱面上光场复振幅表示为〔谱面坐标以  $(u, v)$  表示〕

$$V(u, v) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N A(m, n) \exp[i\phi(m, n)] \delta(u - m, v - n) \quad (2)$$

在光栅面上与之相应的光场复振幅  $U(x, y)$  同它存在逆傅里叶变换关系, 在考虑了(1)式后可知

$$U(x, y) = A(0, 0) + 2 \left( \sum_{m=-M}^M \sum_{n=1}^N + \sum_{m=1, n=0}^M \right) A(m, n) \cos[2\pi(mx + ny) + \phi(m, n)] \quad (3)$$

其光强 
$$I(x, y) = |U(x, y)|^2 = U^2(x, y) \quad (4)$$

其位相 
$$\psi(x, y) = \begin{cases} 0 & U(x, y) \geq 0 \\ \pi & U(x, y) < 0 \end{cases} \quad (5)$$

为了在谱面上恢复具有期望振幅大小分布的复振幅  $V(x, y)$ , 那么光栅的光强透过率分布  $|t(x, y)|^2$  (光栅转移方程  $t(x, y)$  是光栅的复振幅透过率分布) 应正比于光强  $I(x, y)$ , 光栅的位相应等于  $\psi(x, y)$ , 但是由于  $I(x, y)$  是个变化的函数, 采用上述方法获得的二维光栅和所需求的纯位相光栅有一定的差距。为了获得纯位相光栅和保证高衍射效率必须采用以下优化步骤:

### 2.1 优化衍射效率

为了满足纯位相要求, 我们要求光强  $I(x, y)$  应尽量减少变化:

$$\int_0^1 \int_0^1 [I(x, y) - \langle I(x, y) \rangle]^2 dx dy \rightarrow \min \quad (6)$$

这里  $\langle I(x, y) \rangle$  是光强在光栅周期内的均值, 即

$$\langle I(x, y) \rangle = \int_0^1 \int_0^1 I(x, y) dx dy \quad (7)$$

将(3)式代入(4), 经整理可以发现  $I(x, y)$  可分解为

$$I(x, y) = \text{const} + \text{Vib}(x, y) \quad (8)$$

式中, 常量

$$\text{const} = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N A^2(n, m) = \langle I(x, y) \rangle \quad (9)$$

调制量  $\text{Vib}(x, y)$  是由若干余弦调制分量组成, 即

$$\text{Vib}(x, y) = 2 \left( \sum_{m'=-2M}^{2M} \sum_{n'=1}^{2N} + \sum_{m'=1, n'=0}^{2M} \right) |b(m', n')| \cos[\phi_b(m', n') + 2\pi(m'u + n'v)] \quad (10)$$

将(8)、(9)、(10)代入(6)可得

$$\left( \sum_{m'=-2M}^{2M} \sum_{n'=1}^{2N} + \sum_{m'=1, n'=0}^{2M} \right) |b(m', n')|^2 \rightarrow \min \quad (11)$$

上式即是可获得最高衍射效率的优化标准。优化变量采用谱面上各虚点源的位相  $\phi(m, n)$ , 在考虑厄米对称性后, 独立的优化变量个数为  $2MN + M + N + 1$ , 此外由于位相变化是相对的, 因此我们总可以假定虚点源中心  $(0, 0)$  级的位相  $\phi(0, 0) = 0$ , 于是  $2MN + M + N$  就是这一步的最少优化变量数。

为解决上述优化问题, 我们采用梯度下降法进行优化, 优化得到的位相记为  $\phi(m, n)^{\text{opt}}$ , 将它们和期望的振幅大小  $A(m, n)$  代入(3)式可得优化的复振幅  $U(x, y)^{\text{opt}}$ , 其强度  $I(x, y)^{\text{opt}} = [U(x, y)^{\text{opt}}]^2$  具有最小的调制作用, 此时我们忽略这种作用, 认为光栅的强度透过率为 1, 光栅转移方程  $t(x, y)$  定义为

$$t(x, y) = \text{sign}[U(x, y)^{\text{opt}}] \quad (12)$$

具有这种二值位相结构的光栅可产生最高衍射效率, 然而表示该位相的二维图形是由衍射效率来决定的。

对(12)式所示的光栅转移方程进行傅立叶变换, 在谱面上可得到实际的阵列点源, 它们的振幅大小[记为  $A'(m, n)$ ]同期望分布产生了一定的偏差, 这是由于忽略了  $I(x, y)^{\text{opt}}$  的残余调制作用而引起的。为了使实际阵列点源的各级强度(或说振幅大小)达到期望分布, 我们必须进行第二步优化。

## 2.2 优化强度分布

尽管上一步优化所得到的强度分布同期望分布有一定偏差, 但一般来说这种偏差并不会很大, 因此我们可以把上一步获得的结果作为初始结构进行进一步的优化以获得我们期望的强度分布。

根据这一想法, 我们把虚点源的振幅大小和位相都作为进一步优化的优化变量, 并为此提出一种迭代算法, 它可保证每次迭代时优化变量朝好的方向变化, 以达到快速收敛的目的。图 1 是其流程图。

必须指明的是该图中  $\text{correct}(m, n)^{(k)}$  为校正因子, 它应使  $A(m, n)^{(k+1)}$  朝好的方向变化, 我们选取

$$\text{correct}^{(k)}(m, n) = P(m, n) / P^{(k)}(m, n) \quad (13)$$

式中

$$P(m, n) = A(m, n) / \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N A(m, n) \quad (14)$$

$$P(m, n)^{(k)} = A'(m, n)^{(k)} / \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N A'(m, n)^{(k)} \quad (15)$$

当  $P(m, n)^{(k)} > P(m, n)$  时, 第  $(m, n)$  级成份的实际百分比高于理想比例, 那么校正因子  $\text{correct}(m, n)^{(k)} < 1$ , 从而  $A(m, n)^{(k+1)} < A(m, n)^{(k)}$ , 使下次循环时得到的该级成份朝减小的方向

变化,即  $A(m,n)^{(k+1)}$  朝好的方向变化。

当  $P(m,n)^{(k)} \leq P(m,n)$  时,经上面类似推理也可得到这种结果。

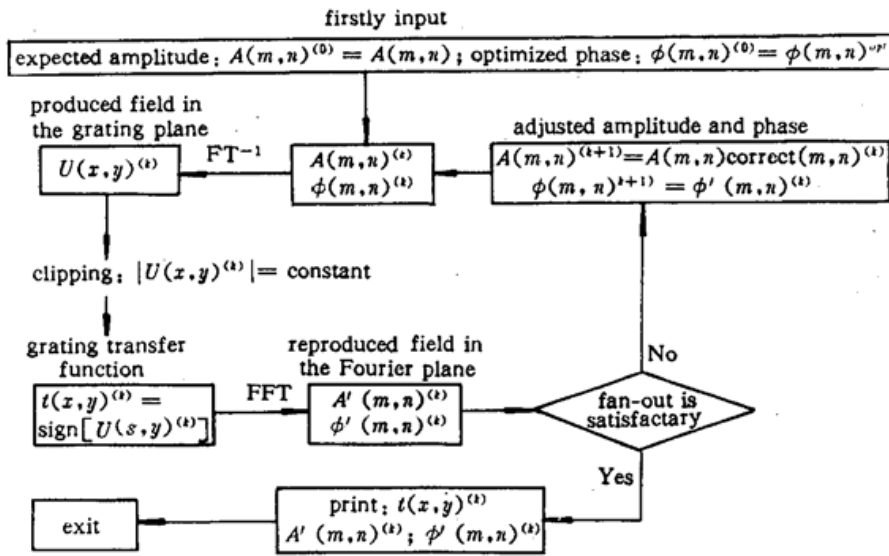


Fig. 1 Second optimization step

Table 1 The comparison of the first and second optimizations;  $\eta$  is the diffraction efficiency;  $\eta = \sum I(m,n)$ ;  $\Delta I$  is the maximum intensity deviation;  $\Delta I = \max |I(m,n) - \bar{I}| / \bar{I}$ , where  $\bar{I}$  is the average intensity;  $\bar{I} = \eta / (2M + 1)(2N + 1)$ . The following is the same

Fan-out	First optimization		Second optimization	
	$\eta(\%)$	$\Delta I(\%)$	$\eta(\%)$	$\Delta I(\%)$
6×6	81.6	27.8	0.804	<0.01
7×7	81.9	22.5	0.809	<0.01
8×8	81.5	24.8	0.805	<0.01
9×9	82.1	27.6	0.809	<0.01
17×17	82.3	27.1	0.810	<0.01
23×23	81.7	25.1	0.805	<0.01
4×8	81.7	26.3	0.805	<0.01

Table 2 The comparison of different binary phase gratings, where,  $\Delta\phi$  is the phase delay; \* is taken from ref[3]; # is taken from ref[6]; \ means that we haven't collected corresponding data

Fan-out	Arbitrary-geometry			Trapezoid-geometry			Separable grating		
	$\eta(\%)$	$\Delta I(\%)$	$\Delta\phi$	$\eta(\%)$	$\Delta I(\%)$	$\Delta\phi$	$\eta(\%)$	$\Delta I(\%)$	$\Delta\phi$
6×6	80.4	<0.01	$\pi$	74.9*	0.60	$\pi$	71.4#	0.02	$\pi$
7×7	80.9	<0.01	$\pi$	79.0*	0.50	2.893	61.8#	0.02	$\pi$
8×8	80.5	<0.01	$\pi$	75.2*	2.80	$\pi$	58.0#	0.08	$\pi$
9×9	80.9	<0.01	$\pi$	76.9*	0.50	2.950	53.0#	0.08	$\pi$
17×17	81.0	<0.01	$\pi$	\	\	\	65.4#	0.74	$\pi$
23×23	80.5	<0.01	$\pi$	\	\	\	66.2#	1.52	$\pi$
4×8	80.5	<0.01	$\pi$	\	\	\	53.8#	0.05	$\pi$

### 3 等强分束光栅的设计结果

根据上述方法,我们设计了 7 个等强分束的 ABPG。

在表 1 中我们比较了两次优化的结果,从中可知,第一步优化可得到高衍射效率,但均匀性不能令人满意;第二步优化后,衍射效率仅稍有下降而均匀性可以获得很大改善,在这步优化过程中我们发现,只要优化时间允许适当延长,均匀性总能优化到更好的程度。



Fig. 2 Computer-simulated 2D geometry for a  $23 \times 23$  fan-out binary phase grating in a period. The black represents phase  $\pi$ ; The white represents phase 0

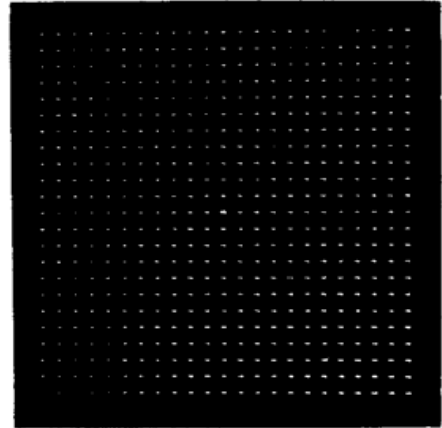


Fig. 3 The experimental result of  $23 \times 23$  fan-out ABPG

表 2 列举了我们的结果、从公开文献中获的梯形方案的最佳结果<sup>[3]</sup>以及可分离变量的结果。显然,我们设计的 ABPG 无论是衍射效率还是均匀性都优于其他编码方案的结果。图 2 给出了  $23 \times 23$  分束的 ABPG 的二值位相图案,我们采用薄膜沉积法制作了该光栅,图 3 是其衍射谱的照片,我们将另文介绍这种复杂图案的制作及实测结果。

### 4 结 论

通过上述理论分析和实际设计,我们可以看出,虚拟场调制法有以下优点:(1)优化变量少,计算速度快;(2)初始值是通过计算求出的,而不像其他方法的初始值是随便给出的,消除了盲目性,加快了优化速度。

我们认为,本文的方法和思路也可推广到  $(0, \text{non} - \pi)$  型位相光栅的设计。

### 参 考 文 献

- 1 P. Ehbets, H. P. Herzig, D. Prongue. High-efficiency continuous surface-relief gratings for two-dimensional array generation. *Opt. Lett.*, 1992, 17(13): 908~910
- 2 Joseph N. Mait. Design of binary-phase and multiphase Fourier gratings for array generation. *J. Opt. Soc. Am.*, 1990, 7(8): 1514~1528
- 3 Antti Vasana, Mohammad R. Taghzadeh, Hari Turunen *et al.*. Binary surface-relief gratings for array illumination in digital optics. *Appl. Opt.*, 1992, 31(17): 3320~3335
- 4 Michael R. Feldman, Clark C. Guest. Iterative encoding of high-efficiency holograms for generation of spot arrays. *Opt. Lett.*, 1989, 14(10): 479~481
- 5 Jari Turunen, Antti Vasara, Jan Westerholm. Strip-geometry two-dimensional dammann gratings. 1989, 74(3,4): 245~252

6 Changhe Zhou, Liren Liu. Numerical study of dammann array illuminators. To be published in *Appl. Opt.*.

## Design of an Arbitrary-geometry $(0, \pi)$ Model Binary Phase Grating

Sang Tao Liao Jianghong Lu Zhengwu Zhao Jinli

Zheng Xianming Wong Zhicheng

(*State Key Lab. of Applied Optics, Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics,  
Academia Sinica, Changchun 130022*)

**Abstract** A method to design an arbitrary-geometry  $(0, \pi)$  model binary phase grating is proposed after we have analyzed and compared the characteristics of all kinds of coding-schemes. The development of this method can be divided into two steps: firstly, to get the highest diffraction efficiency, we find the initial binary phase structure; secondly, we adopt an iterative method to optimize above initial structure to get expected intensity dispersion. We have designed 7 binary phase gratings to split the incident light beam into equal-intensity beams. Their diffraction efficiencies are all above 80% and their uniformity deviations are all below 0.01%, which are better than other reported results to the best of our 1 < knowledge.

**Key words** grating, diffraction