

# 无源谐振腔的谐振频率偏移效应

肖贵遐

(国防科技大学 208 研究室, 长沙 410073)

**提要** 无源谐振腔的有效谐振频率(被测得谐振频率)偏移作为参考的基模谐振频率的效应是谐振腔中存在的高阶横模所引起的。由光探测器光接收孔径的有限性或表面的不均匀性而导致各阶横模的空间不正交性,是引起谐振频率偏移效应的主要原因。对此作了详细研究,并对计算结果进行了讨论,总结出谐振频率偏移与谐振腔各参量的相互关系,从而提出减小这种效应的有效措施。

**关键词** 谐振频率偏移,空间正交性,频率牵引

## 1 引言

在稳频激光器<sup>[1]</sup>及惯性旋转传感器<sup>[2]</sup>等精密测量仪器中,精确确定光学谐振腔的谐振频率非常重要。无源谐振腔激光陀螺是基于 Sagnac 效应<sup>[3]</sup>的一种惯性旋转传感器,它是利用谐振腔内顺时针和反时针光之间谐振频率差来敏感惯性系统的旋转角速度,当惯性系统转速为零时,顺时针和反时针光之间的谐振频率差为零。而我们在研究无源谐振腔激光陀螺(如图 1 所示)中却发现,无源谐振腔系统无转动时,顺时针和反时针光之间存在一个随光探测器光接收面的位置和大小而变化的谐振频率差。这个叠加在 Sagnac 效应上的不可逆效应对无源谐振腔激光陀螺的应用是一个严重的障碍。一方面,它使测量动态范围缩小,如果严重的话,将使激光陀螺无法工作。另一方面,它的随机漂移性大大降低激光陀螺的测量精度。因此,找出、分析产生此效应的原因,并提出有效的解决办法是非常必要的。

在无源谐振腔激光陀螺中出现的叠加在 Sagnac 效应上的不可逆效应是由于环形谐振腔的顺时针光或反时针光的有效谐振频率偏移作为参考的基模谐振频率的缘故。本文将分析方形环形腔中产生谐振频率偏移效应的原因,讨论谐振频率偏移与谐振腔各参量的相互关系,提出消除此效应的有效措施。

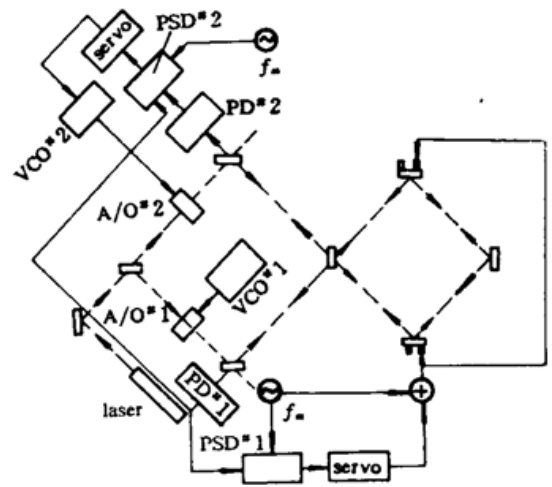


Fig. 1 Schematic diagram of a passive ring resonator gyroscope

## 2 实验装置和现象

我们的实验装置如图 2 所示。从 500  $\mu\text{W}$  单频 He-Ne 红光激光器出来的光被中心频率为 100 MHz 的声光晶体 A/O 衍射,衍射光经高斯匹配球面反射镜  $M_1$  反射后从环形腔的入射镜  $S_1$  沿反时针进入环形腔,从出射镜  $S_3$  透射出来,透射光经分光镜  $S$  分成  $O_1$  和  $O_2$  两束光。 $S_1$  和  $S_3$  是平面反射镜,反射率为  $R_1$ ,透射率为  $T_1$ 。 $S_2$  和  $S_4$  是球面反射镜,反射率为  $R_2$ , $S_2$  和  $S_4$  固定在压电陶瓷晶体 (PZT's) 上,加在 PZT's 上的驱动电压可改变环形腔的腔长。谐振腔边长为 6 cm,自由光谱范围 (FSR) 为 1250 MHz,精细度 ( $F$ ) 为  $2 \times 10^4$ 。光探测器 PD#1 接收  $O_1$  光束,PD#1 的位置固定,光接收面比光斑大很多,基本上所有的光都被接收。PD#2 接收  $O_2$  光,PD#2 的光接收面为光斑的 1/4,其位置可随意调节。

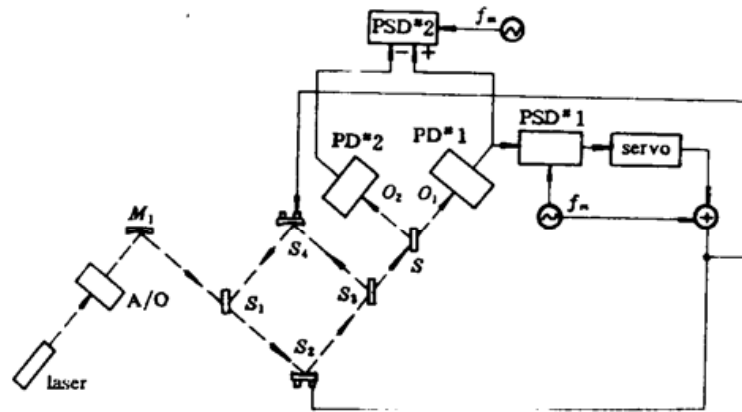


Fig. 2 Schematic diagram of the experimental setup

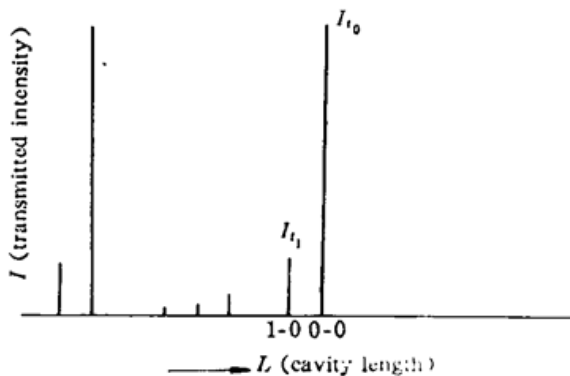


Fig. 3 Transmitted intensity as a function of the cavity length. The largest and the secondary peaks correspond to  $\text{TEM}_{00}$  and  $\text{TEM}_{10}$  modes respectively. The other small peaks correspond to higher-order transverse modes

图 3 为谐振腔透射光强与腔长的函数关系。图中横坐标  $L$  为谐振腔腔长,箭头方向为腔长增大方向;纵坐标  $I$  为谐振腔各阶横模的透射光强。 $I_0$  为  $\text{TEM}_{00}$  模的透射光强, $I_1$  为  $\text{TEM}_{10}$  模的透射光强。从图 3 可看出, $\text{TEM}_{00}$  模的峰值透射光强最大,其次为  $\text{TEM}_{10}$  模(为  $\text{TEM}_{00}$  模光强的 1/5)。 $\text{TEM}_{10}$  模的峰值透射光强远远大于其它高阶横模,且它与  $\text{TEM}_{00}$  模的频率间隔最小,近似为 FSR 的 1/6。

如图 2 所示,PD#1 和 PD#2 的输出在参考频率  $f_m$  被相敏检波器 PSD's 解调。PSD's 的输出近似表征谐振频率误差信号,在谐振中心,PSD's 输出为零。PSD#1 的输出经过伺服反馈系统锁定谐振腔的谐振频率到入射光频率。以 PD#1 输出作为稳频信号时,PSD#2 的输出近似表征

高阶横模引起的频率偏移,变化 PD#2 的位置,频率偏移随着变化<sup>[4]</sup>,把 PD#2 固定在频率偏移最大处,测得偏移值为 2.5 kHz。

### 3 理论分析和计算

当入射光束与谐振腔高斯匹配不完全或失调时, 谐振腔中就会有高阶横模存在, 在理想条件下, 由于各阶横模的空间正交性, 它们之间的相互干涉项为零, 高阶横模对基模仅存在由高阶横模的自相干项引起的频率牵引效应, 此效应一般非常小。在我们的实验条件下 ( $F = 2 \times 10^4$ ,  $\text{FSR} = 1250 \text{ MHz}$ ,  $\nu_{10} - \nu_{00} = \text{FSR}/6$ ,  $P = 1/5$ ,  $A = \Delta\nu_{1/2}/2$ ), 经计算仅为  $34 \text{ Hz}$ , 远远小于实验所测的  $2.5 \text{ kHz}$  谐振频率偏移, 这说明引起谐振偏离的主要因素并不是高阶横模的自相干项。通常, 光探测器的光接收孔径有限, 表面存在着各向不均匀性, 各阶横模的空间正交性被破坏, 它们的相互干涉项不再为零。高阶横模对基模的影响不仅仅是高阶横模自相干项引起的模牵引效应, 而是由高阶横模的自相干项以及各阶横模的互相干涉项综合引起的频率偏移。

在我们的谐振腔中, 耦合到  $\text{TE}_{10}$  模的能量较其它高阶横模多得多, 且  $\text{TEM}_{10}$  模与  $\text{TEM}_{00}$  模的间隔最小, 所以仅限于讨论  $\text{TEM}_{10}$  模对  $\text{TEM}_{00}$  模的影响。在探测器  $\text{PD}^{\#2}$  上的光强为:

$$I_t = I_0 + I_1 + 2\sqrt{I_0 I_1} R \cos \Delta\phi \quad (1)$$

式中  $I_0$  代表  $\text{TEM}_{00}$  模的透射光强,  $I_1$  代表  $\text{TEM}_{10}$  模的透射光强。  $\Delta\phi$  为  $\text{TEM}_{00}$  模和  $\text{TEM}_{10}$  模的位相差, 是一常数值, 在下面的计算中我们令  $\Delta\phi = 0$  以简化计算。相干因子  $R = \iint_{\sigma} f(x, y) \Psi_{00}(x, y) \Psi_{10}(x, y) dx dy$ ,  $\Psi_{m,n}(x, y)$  为归一化拉盖尔 - 高斯函数,  $f(x, y)$  为光接收面的不均匀系数。在理想条件下, 光接收面完全均匀 (即  $f(x, y) = 1$ ), 接收面积足够大, 相干因子  $R = 0$ ,  $\text{TEM}_{00}$  与  $\text{TEM}_{10}$  模的互相干涉项为零, (1) 式变为

$$I_t = I_0 + I_1 \quad (2)$$

环形谐振腔的透射率为<sup>[5]</sup>

$$T = \frac{T_1^2 R_2}{(1 - R_1 R_2)^2 + 4R_1 R_2 \sin^2(\delta/2)} \quad (3)$$

式中  $\delta = [2\pi\langle L \rangle / \lambda]$ ,  $\langle L \rangle$  为入射光绕环形腔一周的光程,  $\lambda$  为光波长。从 (3) 式可看出, 当入射光满足

$$\langle L \rangle / \lambda = q \quad (q \text{ 为正整数}) \quad (4)$$

透射率  $T$  有极大值

$$T_{\max} = \frac{T_1^2 R_2}{(1 - R_1 R_2)^2} \quad (5)$$

当入射光不满足 (4) 式的谐振条件时, 可令

$$2\pi \frac{\langle L \rangle}{\lambda} = 2\pi(q + \Delta\delta) \quad (|\Delta\delta| < 1/2) \quad (6)$$

从 (6) 式中可得

$$\Delta\delta = \frac{\langle L \rangle}{\lambda} - q = \frac{\langle L \rangle}{c} (\nu - \nu_q) \quad (7)$$

式中  $\nu_q$  为谐振中心频率,  $\nu$  为光频率,  $c$  为光速。把 (7) 式代入 (3) 式得

$$T = \frac{T_{\max}}{1 + F \sin^2 \left[ \frac{\pi(\nu - \nu_q)}{\text{FSR}} \right]} \quad (8)$$

式中  $F = \frac{4R_1 R_2}{(1 - R_1 R_2)^2}$  为环形腔的精细度, 自由光谱范围  $\text{FSR} = \frac{c}{\langle L \rangle}$ 。

当  $\Delta\delta$  较小时, (8) 式可简化为

$$T = \frac{T_{\max} \cdot \left(\frac{\Delta\nu_{1/2}}{2}\right)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_{1/2}}{2}\right)^2} \quad (9)$$

式中  $\Delta\nu_{1/2} = \frac{2\text{FSR}}{\pi\sqrt{F}}$  为谐振腔的谐振带宽。

设谐振腔的有效谐振频率为  $\nu_0$ , 加在压电陶瓷上的交流信号所产生的光抖动频率信号为  $A\cos\omega t$ , 则入射光的频率可表示为

$$\nu = \nu_0 + A\cos\omega t \quad (10)$$

把(9)式和(10)式代入(1)式可得 PD#2 上的交流光强为

$$I_i(t) = I_\omega T_{\max} \left\{ \frac{(\Delta\nu_{1/2})^2}{(\nu_0 - \nu_0 + A\cos\omega t)^2 + (\Delta\nu_{1/2}/2)^2} + 2R\sqrt{P} \right. \\ \times \frac{(\Delta\nu_{1/2}/2)^2}{[(\nu_0 - \nu_0 + A\cos\omega t)^2 + (\Delta\nu_{1/2}/2)^2]^{1/2} \times [(\nu_0 - \nu_1 + A\cos\omega t)^2 + (\Delta\nu_{1/2}/2)^2]^{1/2}} \\ \left. + P \times \frac{(\Delta\nu_{1/2}/2)^2}{(\nu_0 - \nu_1 + A\cos\omega t)^2 + (\Delta\nu_{1/2}/2)^2} \right\} \quad (11)$$

式中  $I_\omega$  为耦合到 TEM<sub>00</sub> 模上的光强,  $P$  为 TEM<sub>10</sub> 模与 TEM<sub>00</sub> 模的强度之比, 我们简称为 TEM<sub>10</sub> 模的相对光强。  $\nu_0$  为 TEM<sub>00</sub> 模的谐振中心频率,  $\nu_1$  为 TEM<sub>00</sub> 模的谐振中心频率。

对(11)式进行傅里叶展开, 求得  $I_i(t)$  的频域函数

$$I_i(\omega) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t \quad (12)$$

式中

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I_i(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I_i(t) \cos k\omega t dt$$

令  $a_1 = 0$ , 可求得有效谐振频率  $\nu_0'$  或谐振频率偏差  $\nu_0' - \nu_0$ 。

表 1~3 为抖动信号幅度  $A = \Delta\nu_{1/2}/2$  (谐振腔稳频精度最高点) 时, 谐振频率偏移  $\nu_0' - \nu_0$  的最大值 ( $R = 1$ ) 与谐振腔各参量的定量关系。

**Table 1 Resonance frequency offsets as a function of  $\Delta\nu_{1/2}$  (when  $\nu_1 - \nu_0 = 100$  MHz,  $P = 0.2$ )**

$\Delta\nu_{1/2}$ (MHz)	$\nu_1 - \nu_0$ (Hz)	$\Delta\nu_{1/2}$ (MHz)	$\nu_0' - \nu_0$ (Hz)
0.5	7	3.0	$1.55 \times 10^3$
1	$5.7 \times 10$	3.5	$1.46 \times 10^3$
1.5	$1.95 \times 10^2$	4.0	$3.67 \times 10^3$
2.0	$4.58 \times 10^2$	4.5	$5.22 \times 10^3$
2.5	$8.95 \times 10^2$	5.0	$7.17 \times 10^3$

从表 1~3 的数值可近似得出谐振频率偏移与谐振腔各参量的函数关系:

$$\nu_0' - \nu_0 \propto \frac{\sqrt{P} (\Delta\nu_{1/2})^3}{(\nu_1 - \nu_0)^2} \quad (13)$$

上式表明, 高阶横模引起的谐振频率偏移受谐振腔的谐振带宽的影响最大, 其次是谐振腔的横模间隔, 最后才是高阶横模的相对强度。谐振带宽取决于谐振腔的损耗和周长, 横模间隔取决

于谐振腔的几何结构参数  $G$  和周长, 相对强度取对于入射光与谐振腔的高斯不匹配和失调程度。(13) 式可进一步直观地表示为精细度、相对强度、腔长及几何结构参数  $G$  的函数关系即

$$\nu'_0 - \nu_0 \propto \frac{\sqrt{P}}{F^{3/2}\sigma^2(G)L} \quad (14)$$

式中  $L$  为谐振腔周长,  $\sigma(G) = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\text{FSR}}$ , 为谐振腔  $\text{TEM}_{10}$  与  $\text{TEM}_{00}$  模之间的频率间隔与自由光谱范围之比, 其大小取决于几何结构参数  $G$ ,  $G$  越小,  $\sigma(G)$  越大。从(14) 式中可直观地看出, 损耗越低, 几何结构参数  $G$  越小, 周长  $L$  越长, 与入射光高斯匹配和校准越好的谐振腔, 高阶横模引起的谐振频率越小。

**Table 2 Resonance frequency offsets as a function of  $\nu_1 - \nu_0$  (when  $\Delta\nu_{1/2} = 2 \text{ MHz}$ ,  $P = 0.2$ )**

$\nu_1 - \nu_0$ (MHz)	$\nu'_0 - \nu_0$ (kHz)	$\nu_1 - \nu_0$ (MHz)	$\nu'_0 - \nu_0$ (kHz)
20	11.350	100	0.460
40	2.870	120	0.319
60	1.276	140	0.235
80	0.716	160	0.180

**Table 3 Resonance frequency offsets as a function of  $P$  (when  $\Delta\nu_{1/2} = 2 \text{ MHz}$ ,  $\nu_1 - \nu_0 = 100 \text{ MHz}$ )**

$P$	$\nu'_0 - \nu_0$ (kHz)	$P$	$\nu'_0 - \nu_0$ (kHz)
0.1	0.326	0.4	0.648
0.2	0.460	0.6	0.795
0.3	0.562	0.8	0.919

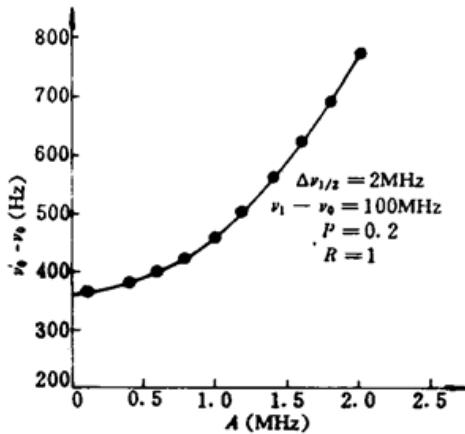


Fig. 4 Resonance frequency offsets as a function of  $A$  (when  $\Delta\nu_{1/2} = 2 \text{ MHz}$ ,  $\nu_1 - \nu_0 = 100 \text{ MHz}$ ,  $P = 0.2$ ,  $R = 1$ )

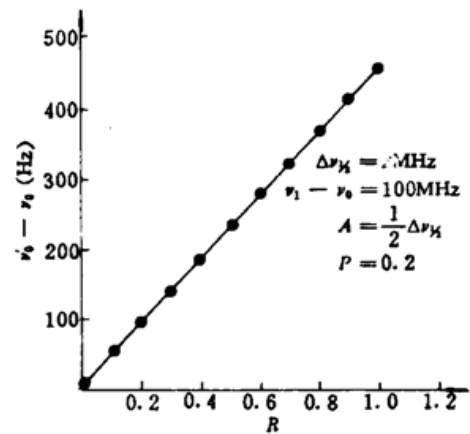


Fig. 5 Resonance frequency offsets as a function of  $R$  (when  $\Delta\nu_{1/2} = 2 \text{ MHz}$ ,  $\nu_1 - \nu_0 = 100 \text{ MHz}$ ,  $A = \Delta\nu_{1/2}/2$ ,  $P = 0.2$ )

谐振腔频率偏移除与以上几个参量有关外, 还与抖动信号幅度和相干因子有关。如图 4 和图 5 所示, 谐振频率偏移随抖动信号幅度和相干因子的减小而单调减小。谐振频率偏移随抖动信号幅度的变化趋势较缓慢, 当抖动幅度趋于零时, 频率偏移趋于不为零的常值。谐振频率偏移与相干因子成线性关系。

## 4 结 论

至此,我们已揭示了谐振腔中存在的高阶横模对谐振频率测量的影响。从理论上讲,一方面可使入射光与光学谐振腔完全匹配和校准,使谐振腔中不存在高阶横模,完全消除谐振频率偏移效应;另一方面,可选择光接收面足够大,表面均匀性好的光探测器,使各阶横模的干涉项为零,把高阶横模引起的频率偏移效应减到最小。实际上,入射光与谐振腔不可能完全匹配和校准,光接收面或多或少存在着表面不均匀性,破坏了各阶横模的空间正交性。完全消除频率偏移效应是不可能的。但我们可采取一些措施减小这种效应:(1)选择损耗低的谐振腔;(2)选择几何结构参数 $G$ 较小的谐振腔;(3)选择周长较长的谐振腔;(4)使入射光与谐振腔尽量匹配和校准;(5)选择均匀性好,光接收面大的探测器;(6)使输出光均匀化,如使光通过散射板;(7)使抖动信号幅度在满足稳频精度条件下尽量小。

## 参 考 文 献

- 1 J. L. Hall, L. Hollberg, L. S. Ma *et al.*. Progress toward phase stable optical frequency standards. *J. Phys. (Paris)*, 1981, C8 : 59~71
- 2 S. Ezekiel, J. A. Cole, J. Harrison *et al.*. Passive cavity optical rotation sensor. *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, 1978, 157 : 68~72
- 3 G. Sagnac. *Cmpt. Rend.*, 1913, 157 : 708
- 4 R. E. Meyer, G. A. Sanders, S. Ezekiel. Observation of spatial variations in the resonance frequency of an optical resonator. *J. Opt. Soc. Am.*, 1983, 73(79) : 939~942
- 5 高伯龙, 李树堂. 激光陀螺. 长沙: 国防科大出版社. 86~88

## The Effect of Resonance Frequency Offset in a Passive Resonator

Xiao Guixia

(208 Research Laboratory, Science and Technology University of National Defense, Changsha 410073)

**Abstract** The effect that the valid resonance frequency (the measured resonance frequency) offsets fundamental resonance frequency which is used as reference, is attributed to the presence of higher-order transverse modes in the cavity. The effect, which is mainly due to the non-orthogonality of these modes that is caused by a limited aperture or an inhomogeneous surface of the detector, has been carefully studied. The results of calculation are discussed and the relationship between the resonance frequency offset and the parameters of the cavity is generalized. Methods to minimize the effect are suggested.

**Key words** resonance frequency offset, spatial orthogonality, frequency pulling