

残缺相干态

夏云杰 孔祥和 闫珂柱 陈万平

(曲阜师范大学物理系, 曲阜 273165)

提要 利用态迭加原理移去相干态中某一光子数态,研究了这种残缺相干态的各种性质,结果显示真空态和单光子数态对光场相干度、振幅起伏和光子数分布有十分明显而又完全不同的影响,残缺其他光子数态的相干态,在光场性质上的表现非常相似,均随平均光子数的变化作衰减振荡。

关键词 相干态,相干度,振幅起伏,光子数分布

1 引言

相干态是物理学中一个重要的概念和方法^[1],在激光物理和量子光学中起着尤为重要的作用。相干态在量子力学中是一个最小测不准波包^[2],在光学物理中又是一个完全相干光场态^[3],相对于光场纯量子意义来说,它又是一个经典光场态,以相干态为对角表象的光场 P 表示的存在与否成为判别非经典光场的标准^[4]。物理学中存在很多相干态,且定义方式也各种各样,光学物理中的相干态通常定义为光子数消灭算符 a 的本征态

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad (1)$$

在粒子数表象中,相干态被表为

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2)$$

即它是由各种粒子数态迭加而成的,作为一个有机整体的相干态,其各种性质已为人们所熟知。本文利用量子力学中的态迭加原理,从相干态中移去某一个光子数态,这时的态当然已不是相干态,但在粒子数组成上是从相干态中“挖去”了一个粒子数态,不妨称之为残缺相干态。

本文利用从相干态中移去某光子数态的方法,来“解剖”相干态,从一个侧面认识各光子数态对相干态各种性质的影响,结果显示,真空态和单光子态对相干态各种性质的影响最大,而任意光子数态 $|m\rangle$,仅对 m 阶相干度的影响明显,其他情况下的光子数态对相干态性质的影响并不十分显著,另外,残缺相干态可呈现很强的光场非经典性质,这对于深入认识相干态的各种性质与光场非经典效应的产生将有一定的意义。

2 残缺相干态的产生

残缺相干态的产生在理论上是容易做到的,利用态迭加原理,任意光子数态 $|m\rangle$ 与相干

态的迭加态

$$|z\rangle_m = \alpha|m\rangle + \beta|z\rangle \quad (3)$$

它的归一化条件为

$$r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2n_m\cos\theta_m = 1 \quad (4)$$

其中 $\alpha = r_1e^{i\theta_1}$, $\beta = r_2e^{i\theta_2}$, $z = Re^{i\varphi}$, 且

$$\theta_m = \theta_2 - \theta_1 + m\varphi \quad (5)$$

$$n_m = |\langle m|z\rangle| = \frac{R^m e^{-R^2/2}}{\sqrt{m!}} \quad (6)$$

若从态 $|z\rangle_m$ 中使光子数态 $|m\rangle$ 消失, 即从相干态 $|z\rangle$ 中移去光子数态 $|m\rangle$, 则应满足

$$\alpha + \beta n_m e^{im\varphi} = 0 \quad (7)$$

即

$$r_1 = r_2 n_m \quad (8)$$

$$\theta_m = \pi \quad (9)$$

与归一化条件(4)式联立, 可得

$$r_1^2 = \frac{n_m^2}{1 - n_m^2} \quad (10)$$

$$r_2^2 = \frac{1}{1 - n_m^2} \quad (11)$$

我们称满足(7)式的态 $|z\rangle_m$ 为残缺相干态, 值得指出的是, 残缺相干态如何从实验上产生尚有待进一步的研究和探索。

3 高阶相干度

相干态是完全相干光场, 各阶相干度均为 1, 光在某一时空点的 k 阶相干度定义为

$$g^{(k)}(0) = \frac{\langle a^{+k}a^k \rangle}{\langle a^+a \rangle^k} \quad (12)$$

式中 a , a^+ 分别为光场的消灭与产生算符。

利用(3), (4)式容易求出

$$\langle a^{+k}a^k \rangle = \begin{cases} r_2^2 R^{2k} + (1 - r_2^2) \frac{m!}{(m-k)!} & (m \geq k) \\ r_2^2 R^{2k} & (m < k) \end{cases} \quad (13)$$

把(10), (11)式代入上式, 可得 k 阶相干度为

$$g^{(k)}(0) = \begin{cases} \frac{(1 - n_m^2)^{k-1} \left[\bar{n}^k - \frac{m!}{(m-k)!} n_m^2 \right]}{(\bar{n} - mn_m^2)^k} & (m \geq k) \\ \frac{(1 - n_m^2)^{k-1}}{(1 - n_{m-1}^2)^k} & (m < k) \end{cases} \quad (14)$$

其中 $\bar{n} = R^2$ 是相干态平均光子数。在 $\bar{n} \ll 1$ 时, 即弱场情形下, 上式变为下列几种情况:

(1) $m \geq k$ 时

$$g^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & (m > k) \\ 0 & (m = k) \end{cases} \quad (15)$$

(2) $m < k$ 时

$$g^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & (m = 0) \\ \infty & (m = 1) \\ 1 & (m > 1) \end{cases} \quad (16)$$

而对于 $\bar{n} \gg 1$ 时的强场情形, 均有

$$g^{(k)}(0) = 1 \quad (17)$$

图 1 和图 2 分别是 $m < k$ 和 $m \geq k$ 时残缺相干态四阶和八阶相干度随相干态平均光子数的变化。可以看出, 强场情况下 (\bar{n} 足够大), 各阶相干度均为 1, 残缺相干态仍保持为完全相干光, 弱场情况下 (\bar{n} 较小), 当残缺相干态的 m 小于相干度的阶数时, 相干态中真空态的消失使各阶相干度均小于 1, 残缺相干态呈现很强的非经典特性, 对其他情况, 相干度随相干态平均光子数的增大从大于 1 变为小于 1, 再逐渐上升直至趋于 1, 即相干度在 1 的左右仅振荡一次。当残缺相干态 $|z\rangle_m$ 中的 m 大于等于相干度的阶数时, 除 m 阶相干度可任意地小之外, 其他情况下, 随着相干态平均光子数的增大, 相干度在 1 的左右来回作衰减振荡, 直至趋于 1。值得注意的是, 相干态中真空态和单光子态的缺少在平均光子数较小时, 前者可使相干度趋于 0, 后者可使相干度趋于 $+\infty$ 。显然, 相干态中的真空态和单光子态对相干度的影响最大, m 个光子数态对 m 阶相干度有较大影响。

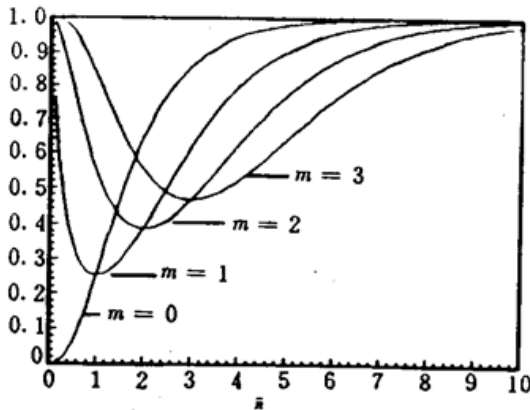


Fig. 1 Variation of the fourth coherence degree versus average photon number ($m < k$)

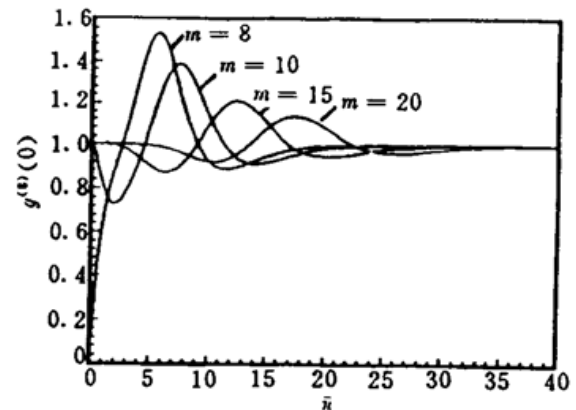


Fig. 2 Variation of the 8th coherence degree versus average photon number ($m \geq k$)

4 场振幅起伏和光子数分布

场振幅起伏和光子数分布决定了光场压缩和亚泊松分布^[5,6]两种重要的非经典效应, 表征这两种光场非经典性质常用下列两个参数^[7]

$$S = \langle : (a + a^\dagger)^2 : \rangle - \langle a + a^\dagger \rangle^2 \quad (18)$$

$$Q = \frac{\langle a^{+2} a^2 \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2}{\langle a^\dagger a \rangle} \quad (19)$$

实际上, 参数 S 是光场态相对于真空态的场振幅起伏, Q 是相对于泊松分布的光子数起伏, 对应于压缩态, $S < 0$, 对应于亚泊松分布, $Q < 0$ 。

由(3)式, 可直接求出下面场算符的残缺相干态期待值

$$\langle a + a^\dagger \rangle = 2r_2^2 R \cos \varphi + 2r_1 r_2 X \quad (20)$$

$$\langle a^2 + a^{+2} \rangle = 2r_2^2 R^2 \cos 2\varphi + 2r_1 r_2 Y \quad (21)$$

其中

$$X = -(\sqrt{m} n_{m-1} + \sqrt{m+1} n_{m+1}) \cos \varphi \quad (22)$$

$$Y = -(\sqrt{m(m-1)} n_{m-2} + \sqrt{(m+1)(m+2)} n_{m+2}) \cos 2\varphi \quad (23)$$

代入(8),(9)式,可立即得到

$$S = \frac{8P_m \cos^2 \varphi}{(1-P_m)^2} (m + \bar{n}) - \frac{2mP_m}{1-P_m} - \frac{2P_m \cos 2\varphi}{(1-P_m)\bar{n}} [m(m-1) + \bar{n}^2] - \frac{4P_m^2 \cos^2 \varphi}{(1-P_m)^2 \bar{n}} (m + \bar{n})^2 \quad (24)$$

式中 $P_m = n_m^2$, 为相干态中光子数态 $|m\rangle$ 的分布几率. 令 $m=0$, 上式变为

$$S = \frac{2P_0 \bar{n}}{1-P_0} > 0 \quad (25)$$

这时在弱场(\bar{n} 较小)情况下, S 变得很大, 即残缺真空的相干态可极大地改变场振幅的起伏, 并总是使场振幅的起伏增大. 在其他情况下, 我们容易看出, 当 m 很大, 或 \bar{n} 很大时, 均有 $S \approx 0$, 这时振幅起伏与原相干态相同. 当 \bar{n} 很小时, $P_m \approx \bar{n}^m/m!$, 代入(24)式, 得

$$S = \begin{cases} -2\bar{n} \cos 2\varphi + O(\bar{n}^2) & (m=1) \\ \frac{2\bar{n}^{m-1}}{(m-2)!} \cos 2\varphi + O(\bar{n}^m) & (m>1) \end{cases} \quad (26)$$

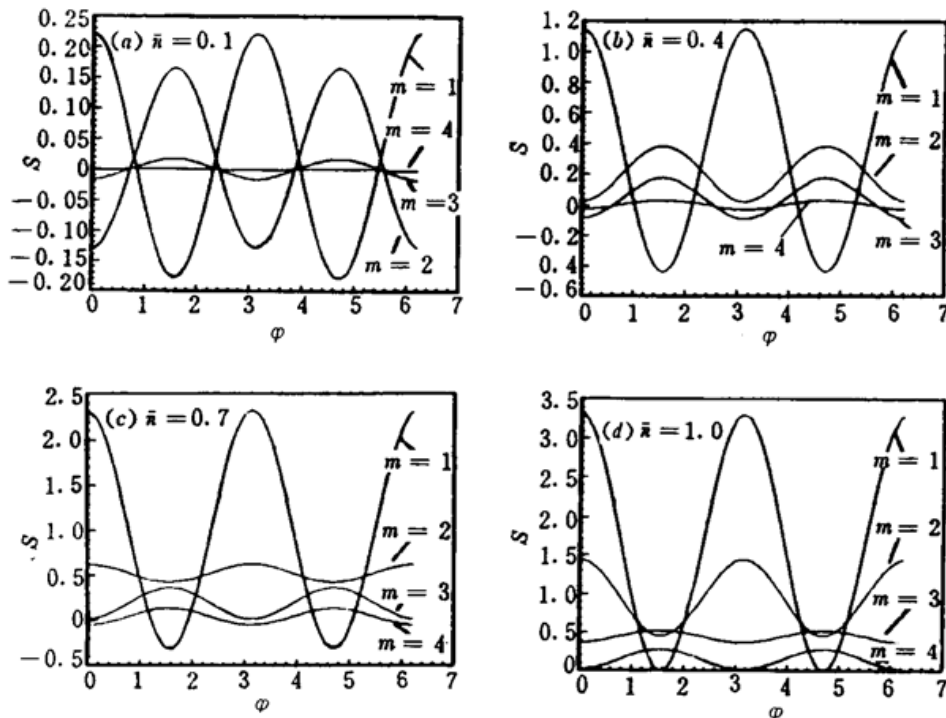


Fig. 3 Parameter S as function of phase angle φ for some different average photon number

显然, 只有平均光子数 \bar{n} 较小, 且 m 又较小时, 残缺相干态才可能存在压缩, 图 3 是平均光子数 \bar{n} 取不同值时, 参数 S 随相角 φ 的变化曲线, 其结果与我们上面的分析完全一致. 值得注意的是, 真空态与单光子态的缺少使场振幅起伏变得很大, 真空态的缺少使场振幅起伏总是增大, 单光子态的缺少使场振幅起伏随相角 φ 在零的附近作较大幅度的周期性变化, 这时残缺相干态可获得显著的压缩效应.

利用有关公式, 可得光子数分布参数

$$Q = \frac{\bar{n}^2 - m(m-1)P_m - (\bar{n} - mP_m)^2 / (1 - P_m)}{\bar{n} - mP_m} \quad (27)$$

对于 $m = 0$, 上式变为

$$Q = -\frac{\bar{n}e^{-\bar{n}}}{1 - e^{-\bar{n}}} < 0 \quad (28)$$

缺少真空态的残缺相干态其光子数分布是亚泊松分布。当 \bar{n} 较小时, 这种非经典分布还特别强 ($Q \rightarrow -1$)。对于其他情况下的残缺相干态, Q 参数随相干态平均光子数的变化如图 4 所示, $m = 1$ 时, 光子数分布在弱场 (小 \bar{n}) 情况下, 出现较强的超泊松分布, 随着 \bar{n} 的增大, 变为亚泊松分布, 在 \bar{n} 很大时, 即强场情况, 接近于泊松分布。对于 m 取其他值时, 光子数的变化趋势完全类似, $\bar{n} \ll 1$ 时, 先呈现亚泊松分布, 随着 \bar{n} 的增大, 又呈现超泊松分布, \bar{n} 再增大, 又回到亚泊松分布, 以后便逐渐趋于泊松分布。总的看, 除 $m = 0, 1$ 外, 残缺相干态的光子数分布, 随着平均光子数 \bar{n} 的变化, 在超泊松分布和亚泊松分布之间发生振荡, 随着 m 的增加, 振荡的幅度逐渐变小, 即超泊松分布和亚泊松分布变得越来越弱。真空态和单光子数态对相干态的光子数分布影响有些特别, 缺少这两个态的残缺相干态, 一个使光子数分布呈现较强的亚泊松分布, 另一个呈现较强的超泊松分布。

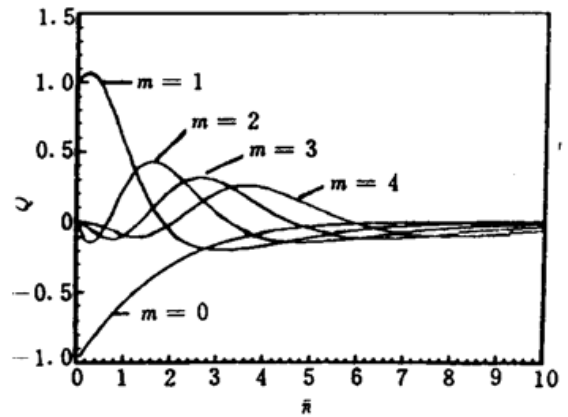


Fig. 4 Parameter Q as function of average photon number

5 结 论

本文通过移去相干态的某一光子数态, 研究了这种残缺相干态的各阶相干度, 振幅起伏和光子数分布, 结果显示, 真空态和单光子数态对相干态的各阶相干度、光子数分布与振幅起伏的影响最大, 其他光子数态的影响较弱, 且结果完全相似, 残缺相干态在某些条件下可呈现很强的压缩和亚泊松等非经典效应, 从一个侧面认识了各光子数态对相干态各种性质的贡献, 对于理解相干态自身的性质及光场非经典效应的产生, 提供了一种新的方法, 我们相信, 这种方法同样适用于其他量子态, 比如压缩态等。

参 考 文 献

- 1 范洪义. 相干态及其若干应用. 物理学进展, 1987, 7(2): 216
- 2 Shrodinger B.. Der stetige ubergang von der mikre-zurmakromechnik. *Naturwissenschaften*, 1926, 14: 664
- 3 R. J. Glauder. Photon correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 1963, 10(1): 84
- 4 郭光灿. 量子光学, 北京: 高等教育出版社, 1989. 517~522
- 5 D. F. Walls. Squeezed state of light. *Nature*, 1983, 306(2): 141
- 6 R. Loudon, P. L. Knight. Squeezed light. *J. Mod. Opt.*, 1987, 34(6): 709
- 7 G. S. Agarwal, G. Tara. Nonclassical character of states exhibiting no squeezing or sub-Poissonian statistics. *Phys. Rev. A*, 1992, 46(1): 485

Incomplete Coherent States

Xia Yunjie Kong Xianghe Yan Kezhu Chen Wanping

(Department of Physics, Qufu Normal University, Shandong 273165)

Abstract A certain photon state is removed from a coherent state by the state superposition principle. The various properties of this kind of incomplete coherent state are studied. The results show that the vacuum state and the single-photon state have great and quite different influences upon coherence degree and amplitude fluctuation as well as photon distribution in coherent state. For other cases, the incomplete coherent states exhibit very similar light properties which oscillate attenuately and synchronously with the variation of average photon number.

Key words coherent state, coherence degree, amplitude fluctuation, photon distribution

激光、光电子和微电子国际技术报告会征稿简则

由中国光学光电子行业协会、中国光学学会、国际光学工程学会组织的 1996 激光、光电子和微光子国际技术报告会将于 1996 年 11 月 5~8 日在北京中国国际展览中心召开。会议共设 16 个专题组：全息显示及元件；半导体激光器；激光在医学诊断与处理中的应用；激光在工业、材料加工及航天中的应用；固体、气体、准分子及其他先进激光器；光学信息记录、存贮、恢复与多媒体通信技术；集成光电子学；显示技术与器件；光电、SHG 材料元件与应用；光纤元件与光通信；探测器、焦平面阵列与应用；光纤传感器；光学折射和非线性光学材料；光电子成像与信息处理；光学、光电子学、机械检测技术与应用；亚洲光电子市场等。有关投寄论文摘要、报告，请与程序委员会秘书处联系（北京 327 信箱工程光学系，邮编：100081，联系人：林永昌）