

# 辅镜全息振动分析

蔡云良 管尧兴

(南京航空航天大学 理学院 南京 210016)

**提要** 提出了辅镜全息三维振动分析的新技术,论述了辅镜时间平均全息干涉图的光强分布规律,阐明了该技术在作三维振动分析时的解法以及借助于准同位辅助物体全息术提取参考光虚点光源振幅信息的方法,从理论上分析了辅镜全息干涉图的零级明纹位置问题。

**关键词** 辅镜时间平均全息,准同位辅助物体全息,三维振动分析

## 1 引言

激光全息振动分析一般采用的光学系统都是振幅分割形式的<sup>[1~6]</sup>,这种系统使用的光学元件较多,调整也较麻烦,且易受环境的影响。本文提出的辅镜全息三维振动分析方法采用物面辅镜波前分割形式的全息系统,它可避免振幅分割光学系统的不足。由于该方法所用物理模型和振幅分割全息法不同,相应的数学分析方法亦不一样。一般说来前者的分析方法要比后者复杂得多。这主要是因为辅镜全息法记录的时间平均全息干涉图受到物面辅镜振动的影响。基于辅镜全息干涉测振方法的基本特点,它有学术和实用价值。

## 2 辅镜时间平均全息振动分析原理

辅镜时间平均全息振动分析的基本构思如下:被测物体表面用不干胶贴一块轻薄的辅助平面反射镜,三个呈空间布置的点光源  $G_i (i = 1, 2, 3)$  发出的三束发散光波分别照射这一组合体,由于辅镜的波前分割作用,三束发散光波一一被分成物光波  $O_i (i = 1, 2, 3)$  和参考光波  $R_i (i = 1, 2, 3)$ 。其中诸参考光经转折反射镜  $M_i (i = 1, 2, 3)$  反射后抵达干版。在被测物体作稳定的正弦振动后,三组记录光束  $O_i, R_i (i = 1, 2, 3)$  分别对干版的三个不同的区域曝光,便可记录和再现三个独立的辅镜时间平均全息干涉图,借此可分析被测物体的三维振幅场。图 1 示出了辅镜时间平均全息测振光学系统的第  $i$  组光路。

首先分析辅镜时间平均干涉图的光强分布规律。

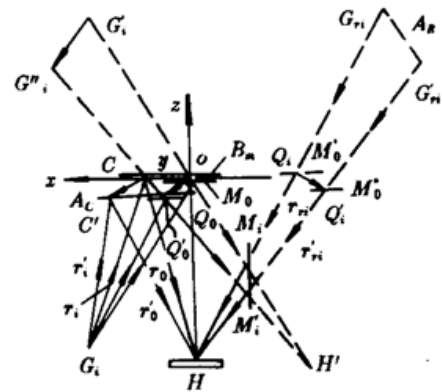


Fig. 1 Shows the  $i$ -th path of an auxiliary-mirror holographic system

设在任一时间  $t$ , 辅镜全息系统记录的三个时间平均全息图的光强分别是

$$I_{Hi} = O_i O_i^* + R_i R_i^* + R_i^* O_i + R_i O_i^* \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

在记录过程中, 被测物体和其表面辅镜一起振动, 振动体表面的漫反射物光  $O_i (i = 1, 2, 3)$  和参考光虚点光源  $G_{ri} (i = 1, 2, 3)$  发出的参考光波  $R_i (i = 1, 2, 3)$  的复振幅不仅是空间坐标的函数, 而且也是时间  $t$  的函数。因而  $I_{Hi} (i = 1, 2, 3)$  也是时间的函数。诸辅镜时间平均全息图的曝光量  $E_i$  和  $I_{Hi} (i = 1, 2, 3)$  在曝光时间  $T$  内的时间平均积分成正比

$$E_i = \frac{1}{T} \int_0^T (O_i O_i^* + R_i R_i^* + R_i^* O_i + R_i O_i^*) dt \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

如果这些全息图用被测物体静止时其表面辅镜反射的三束原参考光光波  $R_{ji} (i = 1, 2, 3)$  分别照射, 则诸辅镜时间平均全息图的振幅透过率分别为

$$\tau_i = \frac{\beta}{T} \int_0^T [R_{ji} (O_i O_i^* + R_i R_i^*) + R_{ji} R_i^* O_i + R_{ji} R_i O_i^*] dt \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

式中  $\beta$  是与干版乳剂层特性有关的比例常数。若设在任一时刻由作正弦振动的被测物体上任意一点  $C$  漫反射到干版上三个区域的物光波的复振幅分别为

$$O_i = a_{oi} \exp[i(\varphi_{oi} + \Delta\varphi_{oim} \sin\omega t)], \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

随物体一起振动的诸参考光虚点光源  $G_{ri} (i = 1, 2, 3)$  照射到干版上三个区域的参考光光波的复振幅分别为

$$R_i = a_{ri} \exp[i(\varphi_{ri} + \Delta\varphi_{rim} \sin\omega t)] \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

被测物体静止时三束物光光波和三束原参考光光波的复振幅分别记为

$$O_{ji} = a_{oi} \exp(i\varphi_{oi}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

$$R_{ji} = a_{ri} \exp(i\varphi_{ri}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

在上述各式中,  $\varphi_{oi} (i = 1, 2, 3)$  分别是被测物体静止时从其表面漫反射到干版三个区域的诸物光光波的相位,  $\Delta\varphi_{oim} (i = 1, 2, 3)$  分别是由被测物体从平衡位置振动位移到振幅位置时引起的物光光波的相位变化,  $\varphi_{ri} (i = 1, 2, 3)$  分别是各参考光虚点光源  $G_{ri} (i = 1, 2, 3)$  在静止时从它们各自的平衡位置照射到干版三个区域的诸参考光光波的相位,  $\Delta\varphi_{rim} (i = 1, 2, 3)$  分别是由诸参考光虚点光源从它们的平衡位置振动位移到振幅位置时引起的参考光光波的相位变化,  $a_{oi}$  和  $a_{ri} (i = 1, 2, 3)$  分别是各物光光波和参考光光波的振幅,  $\omega$  是被测物体和辅镜的振动圆频率。

将(4)~(7)式代入(3)式, 并只考虑(3)式中第二项所表示的原始像, 且考虑到曝光时间远大于被测物体的振动周期,  $T \gg 2\pi/\omega$ , 则积分后得

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{\beta}{T} \int_0^T \{a_{ri} \exp(i\varphi_{ri}) a_{oi}^* \exp[-i(\varphi_{ri} + \Delta\varphi_{rim} \sin\omega t)] a_{oi} \exp[i(\varphi_{oi} + \Delta\varphi_{oim} \sin\omega t)]\} dt \\ &= \beta a_{ri}^* a_{oi} \exp(i\varphi_{oi}) J_0(\Delta\varphi_{oim} - \Delta\varphi_{rim}) \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (8)$$

因此, 全息干版上三个辅镜时间平均全息图再现的各个干涉图的光强分布分别为

$$I_i = \beta^2 a_{ri}^* a_{oi} J_0^2(\Delta\varphi_{oim} - \Delta\varphi_{rim}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

由此可见, 辅镜时间平均全息干涉图的光强分布规律虽仍为第一类零价贝塞尔函数型的, 但它与一般的时间平均全息干涉图的光强分布有一个很大的差别: 即前者不但存贮了物体振幅的信息, 而且还包含了各参考光虚点光源的振动信息。

根据(9)式所表达的辅镜时间平均干涉图组, 可确定被测物体振幅矢量  $A_o$ 、参考光虚点光源振幅矢量  $A_{ri} (i = 1, 2, 3)$  和干涉图组条纹级数  $N_i (i = 1, 2, 3)$  之间的定量关系方程组。为此,

只需计算(9)式中的综合相位变化

$$\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_{oim} - \Delta\varphi_{rim} \quad i = 1, 2, 3 \quad (10)$$

对于由物体振动引起的相位变化  $\Delta\varphi_{oim}$  应为<sup>[1]</sup>

$$\Delta\varphi_{oim} = k(r_{oi} - r_i) \cdot A_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

式中  $r_{oi}$ 、 $r_i$  分别为单位观察矢量和照明矢量, 相位因子  $k=2\pi/\lambda$ 。

在计算  $\Delta\varphi_{rim}$  时可认为, 被测物体振动前后的参考光  $R_i$  和  $R'_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 分别是由虚点光源  $G_{ri}$  和  $G'_{ri}$  ( $i=1, 2, 3$ ) 发出的, 故随物体振动引起的参考光光波的相位变化应为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{rim} &= k[(HM'_i + M'_iQ'_0 + Q'_0G'_i) - (HM_i + M_iQ_0 + Q_0G_i)] \\ &= k[(HM'_i + M'_iQ'_i + Q'_0G'_{ri}) - (HM_i + M_iQ_i + Q_iG_{ri})] \\ &= k(HG'_{ri} - HG_{ri}) \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (12)$$

若物体振动前后的参考光光波的单位照明矢量定义为

$$r_{ri} = HG_{ri}/|HG_{ri}| \quad r'_{ri} = HG'_{ri}/|HG'_{ri}| \quad i = 1, 2, 3$$

在计及了上述单位矢量, 并考虑到这些单位矢量比参考光虚点光源的振幅  $A_{Ri}$  ( $i=1, 2, 3$ ) 大得多, 可认为  $r_{ri}=r'_{ri}$ , 则(12)式变为

$$\Delta\varphi_{rim} = k(r_{ri} \cdot A_{Ri}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

将(11)和(13)式代入(10)式, 并考虑到三路参考光光程应调整得相等, 使  $A_{R1}=A_{R2}=A_{R3}=A_R$ , 则对于辅镜时间平均全息干涉图的明条纹应有

$$(r_{oi} - r_i) \cdot A_i - r_{ri} \cdot A_R = \Delta\varphi_i/k \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

由上式可见, 要解得振动体测点  $C$  振幅的三个分量, 必先求出参考光虚点光源振幅的三个正交分量。

### 3 用准同位辅助物体全息术提取参考光虚点光源振幅三分量

在记录振动体的辅镜时间平均全息干涉图组时, 对干涉图光强分布产生影响的参考光虚点光源的振幅  $A_R$  用准同位辅助物体全息法确定。具体做法如下: 在记录好振动物体的辅镜时间平均全息图之后, 仍保持该物体的谐振频率和振幅。在此条件下, 将一块与被测物体尺寸相同的钢质平板(在其与被测物体贴镜部位相同的位置上开一个孔, 孔的大小稍稍大于平镜, 可方便地将其套入), 以靠近但不接触振动体的准同位方式放置并严格固定, 遮挡振动物体, 只露出振动物体上的平镜。然后用辅镜全息光学系统的三束原始发散光束, 依次照射这块静止的钢质平板和振动着的平镜, 记录这一组合体的三个独立的时间平均全息图。

在这种情况下, 静止准同位辅助物体(钢质平板)漫反射的物光波的复振幅也可近似用(6)式表示, 而由随振动体一起振动的辅镜镜面反射的参考光和镜面静止时的参考光与(5)、(7)式所示的相同。于是可求得辅助物体的时间平均全息干涉图的光强分布为

$$I_{ri} = \beta_i^2 a_{oi}^2 a_{ri}^2 J_0^2(\Delta\varphi_{rim}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

可见, 辅助物体的时间平均全息干涉图只含有参考光虚点光源的振动信息。利用辅镜全息系统的几何参数和(15)式所示的干涉图组, 可求得求解诸参考光虚点光源振幅的三个分量的线性方程组

$$r_{ri} \cdot A_{Ri} + r_{rij} \cdot A_{Rj} + r_{ria} \cdot A_{Ra} = \Delta\varphi_{rim}/k \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

这样, 在用上式解得  $A_R$  的三个分量并将其代入(14)式后, 便可求出振动体上任意一点的振幅

的三个分量。

#### 4 辅镜时间平均全息干涉图零级明纹位置分析

为了分析辅镜时间平均全息干涉图零级条纹的位置,先引入如下等效性:根据反射镜( $M_i$ ,  $i=1,2,3$ )成像的对称性,当用第  $i$  组光路记录和再现被测物体的辅镜时间平均全息图时,在虚干版点  $H'$  所作的记录和在实干版点  $H$  所作的记录是等效的,见图 1。因为在这二种情况下, $C$  点的漫反射光波和参考光虚点光源  $G_i$  ( $i=1,2,3$ ) 发出的参考光因辅镜镜面随物体振动引起的光程差都相等,且虚点光源  $G_i$  的振幅和虚点光源  $G_{ri}$  的振幅一样,均为  $A_R$ 。为了简化计算,图 1 的坐标系这样设置,坐标原点  $O$  设在观察点和参考光虚点光源  $G_i$  的连线与辅镜镜面的交点  $Q_0$  处(即  $C$  点)。 $Z$  轴平分  $Q_0G_i$  和  $H'Q_0$  之间的夹角,  $Q_0G_i=H'Q_0$ 。并设观察点与虚干版点  $H'$  重合,坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ 。 $Q_0$  点坐标为  $(0, 0, 0)$ , 其法线  $n=(0, 0, 1)$ 。被测物体振动位移  $A$  后,点  $C$  移到  $C'$  点,  $Q_0$  点移到了  $Q'_0$  点,  $Q'_0=C'=(A_x, A_y, A_z)$ 。随被测物体一起振动的辅镜  $M_0$  绕其镜面内的  $X, Y$  轴分别转过一个微小角度  $\alpha, \beta$  角。此时,几何点  $C'$  的法线为

$$n' = \sin\alpha\cos\beta i + \sin\alpha\sin\beta j + \cos\alpha\cos\beta k \quad (17)$$

这样,根据(14)式就可计算出  $Q_0$  ( $C$  点) 振动位移到  $Q'_0$  ( $C'$ ) 的综合相位变化。

由图 1 可见,参考光虚点光源  $G_i$  ( $X_{G_i}, Y_{G_i}, Z_{G_i}$ ) 的振幅  $A_R$  可用两几何点  $G'_i$  和  $G_i$  之差求得,即

$$A_{Ri} = G'_i - G_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18)$$

几何点  $G'_i, G_i$  可分别表达如下

$$G'_i = G_i + 2n[n \cdot (Q_0 - G_i)] \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

$$G'_i = G_i + 2n'[n' \cdot (Q'_0 - G_i)] \quad i = 1, 2, 3 \quad (20)$$

在考虑到辅镜镜面的转角  $\alpha, \beta$  很小 ( $\sin\alpha \approx \sin\beta \approx \alpha \approx \beta, \cos\alpha \approx \cos\beta \approx 1$ ) 后,对于上述两式中的后二项,可分别求得为

$$\begin{aligned} 2n'(n' \cdot Q'_0) &= 2A_x \sin^2\alpha \cos^2\beta i + 2A_y \sin^2\alpha \sin^2\beta j + 2A_z \cos^2\alpha \cos^2\beta k \\ &= o_i + o_j + 2A_z k \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} 2n'(n' \cdot G_i) &= (2x_{G_i} \sin^2\alpha \cos^2\beta + 2y_{G_i} \sin^2\alpha \sin^2\beta + 2z_{G_i} \sin\alpha \cos\alpha \cos\beta) i \\ &\quad + (2x_{G_i} \sin^2\alpha \sin\beta \cos\beta + 2y_{G_i} \sin^2\alpha \sin^2\beta + 2z_{G_i} \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta) j \\ &\quad + (2x_{G_i} \sin\alpha \cos\alpha \cos^2\beta + 2y_{G_i} \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta + 2z_{G_i} \cos^2\alpha \cos^2\beta) k \\ &= 2z_{G_i}' a_i + o_j + (2x_{G_i}' a + 2z_{G_i}') k \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (22)$$

$$2n(n \cdot Q_0) = 0 \quad (23)$$

$$2n(n \cdot G_i) = o_i + o_j + 2z_{G_i} k = o_i + o_j + 2z_{G_i}' k \quad i = 1, 2, 3 \quad (24)$$

将(19)~(24)代入(18)式后,可求得

$$A_R = -2z_{G_i}' a_i + o_j + (2A_z - 2x_{G_i}' a) k \quad i = 1, 2, 3 \quad (25)$$

观察干涉条纹时,观察点与点光源  $G_i$  ( $i=1,2,3$ ) 反对称于  $Z$  轴,即  $x_{G_i} = -x_0, y_{G_i} = -y_0, z_{G_i} = z_0$ 。观察方向与参考光虚点光源的照射方向共线,有  $r_0 = r_{ri}$  ( $i=1,2,3$ )。根据所选择的坐标系,又有  $x_0 = -x_{G_i}, y_0 = -y_{G_i}, z_0 = z_{G_i}$ 。由此可得

$$r_0 = r_{ri} = [x_0/(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}] i + [y_0/(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}] j + [z_0/(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}] k$$



$$= [-x_{0i}/(x_{0i}^2 + y_{0i}^2 + z_{0i}^2)^{1/2}]i + [-y_{0i}/(x_{0i}^2 + y_{0i}^2 + z_{0i}^2)^{1/2}]j + [z_{0i}/(x_{0i}^2 + y_{0i}^2 + z_{0i}^2)^{1/2}]k \quad i = 1, 2, 3 \quad (26)$$

第  $i$  组光路记录的辅镜时间平均全息干涉图的灵敏度矢量

$$r_{0i} - r_i = 0i + 0j + 2r_{0i,k} = 0i + 0j + [2z_{0i}/(x_{0i}^2 + y_{0i}^2 + z_{0i}^2)^{1/2}]k = 0i + 0j + [2z_{0i}/(x_{0i}^2 + y_{0i}^2 + z_{0i}^2)^{1/2}]k \quad i = 1, 2, 3 \quad (27)$$

将(25)~(27)式代入(14)式后,便可计算得  $Q_0$  点的总相位变化,以矩阵形式表示为

$$\Delta\varphi_i = k \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z_{0i}/(x_{0i}^2 + y_{0i}^2 + z_{0i}^2)^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0i} \\ A_{0i} \\ A_{0i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -x_{0i}/(x_{0i}^2 + y_{0i}^2 + z_{0i}^2)^{1/2} \\ -y_{0i}/(x_{0i}^2 + y_{0i}^2 + z_{0i}^2)^{1/2} \\ z_{0i}/(x_{0i}^2 + y_{0i}^2 + z_{0i}^2)^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2z_{0i}, a \\ 0 \\ 2A_{0i} - 2x_{0i}, a \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (28)$$

由此可得出结论,观察点和参考光虚点光源二者的连线与振动体表面辅镜镜面的交点,就是辅镜时间平均全息干涉图零级明纹的中心。同时也可看出,若观察位置改变,则零级明纹位置也随之变化。

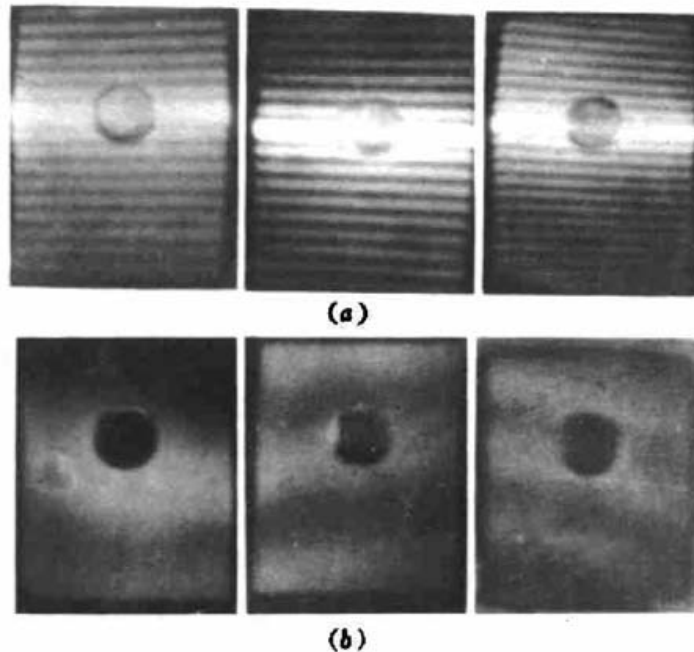


Fig. 2 A set of auxiliary-mirror time-averaged interferograms of an assembly that is made up of a kinescope (4 in) with an auxiliary mirror (a); a set of the time-averaged interferograms of the assembly that is composed of an auxiliary object (aluminium plate) with the auxiliary mirror (b)

## 5 结 果

在研究中,利用辅镜时间平均全息干涉测振理论对一个4吋黑白显像管的显示屏的振动作了实际分析。显像管在其二个短边夹紧固定。辅镜是一块很轻薄的小圆平镜,直径16 mm,用不干胶粘贴在  $x = 0.0$  mm,  $y = 60.0$  mm,  $z = 0.0$  mm 位置。该测件在 XD-7 音频振荡器供电的扬声器的激励下,作正弦振动,用图1所示的辅镜全息光学系统记录了显像管辅镜组合体的一组时间平均全息干涉图,谐振频率为 85 Hz,见图2(a),静止准同位辅助物体与振动辅镜组合体的时间平均全息干涉图组,见图2(b)。利用公式(14)、(16),对上述六个干涉图作了联

解,得到了4吋显像管显示屏屏面的三维振幅场,其结果与用有限元法的计算结合相吻合。由此得出结论,本文提出的辅镜时间平均全息振动分析理论是正确的。

应该指出的是,辅镜时间平均全息干涉测振法所选用的辅镜应足够轻,否则会影响被测物体的真实谐振频率与振型。该方法特别适合在较差的环境下分析较大尺寸试件的振动。

### 参 考 文 献

- 1 C. M. Vest. *Holographic interferometry*, New York, John Wiley & Sons, 1979. 79
- 2 W. Schumann, M. Dubas. *Holographic interferometry*, New York, Berlin, Springer-Verlag, 1979, 39-41
- 3 蔡云良. 机械振动全息分析及其若干问题. *南京航空学院学报*, 1988, 20(3): 7~16
- 4 Cai Yunliang. New holographic system for measuring vibration. *SPIE*, 1991, 1554B: 75~80
- 5 F. M. Mottier. Holography of randomly moving objects. *Appl. Phys. Lett.*, 1969, 15: 44
- 6 N. Takei *et al.*. Holographic interferometry using reference wave with a sinusoidally modulated amplitude, *Opt. & Laser Technology*. 1976, 21

## A Vibration Analysis by Auxiliary-mirror Holography

Cai Yunliang Guan Yaoxing

(Physics College, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

**Abstract** A new technique of using auxiliary-mirror holography to analyse 3D vibration is proposed. The intensity distribution of the auxiliary-mirror time-averaged holographic interferogram is discussed. The solution in which the above holographic technique is used to measure the 3D amplitude and the method which draws information of the virtual point sources of the reference beams with the help of quasi-same-position auxiliary-object holography are explained. The problem of the position of the zero order bright fringe of the auxiliary-mirror time-averaged holographic interferogram is analysed in theory.

**Key words** auxiliary-mirror time-average holography, quasi-same-position auxiliary-object holography, 3D vibration analysis