第23卷 第2期
1996年2月
中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS
Vol. A23, No. 2
February, 1996

光束截面角动量的轴向分量是守恒量*

曹 清 郭 弘 邓锡铭

(中国科学院上海光机所 高功率激光物理国家实验室,上海 201800)

提要 证明了对于在真空中稳态传输的光束来说,其光束截面角动量的轴向分量、角动量平方的轴向分量都是与 z 无关的守恒量;此外还把这一结果推广到傍轴旋对称 $ABCD$ 光学系统;并对一些与角动量有关的问题进行了讨论。

关键词 光流体模型,光束截面角动量

1 引 言

文献[1～3]在合理地引入光束截面能量、动量的概念之后,又进一步引入了光束截面角动量的概念,并着重对内禀角动量部分进行了细致的研究。此外,近些年来,国外的一些研究人员也做了一些与此相近的工作[4~7],他们指出单位长度轨道角动量(类似于光流体模型中的光束截面角动量)的轴向分量是一个与几何位相密切相关的物理量,可以用于厄米-高斯光束与拉盖尔-高斯光束的相互转换上;且在傍轴近似的情况下,它还是一个与截面位置无关的守恒量[5]。本文将用标量场理论来证明,对于在真空中稳态传输或通过傍轴 $ABCD$ 光学系统传输的任意光束来说,其光束截面角动量的轴向分量 $M_{/\!/}$、角动量平方的轴向分量 $M^2_{/\!/}$ 都是与截面位置无关的守恒量。此外,本文还将进一步来讨论一些与角动量有关的问题。

2 $M_{/\!/}$ 及 $M^2_{/\!/}$ 是守恒量

由文献[1]可知,光束截面角动量的表达式为

$$M = \iint_{-\infty}^{\infty} (R \times p)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi^*\left(\frac{i}{\omega}R \times \nabla\phi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

其中的 R 为位置矢量,p 为动量密度,ϕ 为满足亥姆霍兹波动方程的复振幅光场分布函数

$$\phi = \phi_0 e^{-ikL} \tag{2}$$

且 ϕ_0, L 都为 (x,y,z) 的实函数。为了以下的分析方便,这里先把光束截面角动量 M 表示成算符 $\hat{M}$ 的期待值的形式,即

$$M = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi^*(\hat{M}\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

* 国家高技术 863-416 资助项目。

收稿日期: 1995年3月28日

由此可以得到光束截面角动量算符 $\hat{M}$ 及其轴向分量 $\hat{M}_{/\!/}$ 为

$$\hat{M} = \frac{i}{\omega} R \times \nabla \tag{4}$$

$$\hat{M}_{/\!/} = \frac{i}{\omega}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{5}$$

有了光束截面角动量的算符表达形式，现在就可以仿照量子力学那样，来进一步定义光束截面角动量平方算符 $\hat{M}^2$ 及其轴向分量 $\hat{M}^2_{/\!/}$

$$\hat{M}^2 = \left(\frac{i}{\omega} R \times \nabla\right) \cdot \left(\frac{i}{\omega} R \times \nabla\right) \tag{6}$$

$$\hat{M}^2_{/\!/} = \frac{-1}{\omega}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \tag{7}$$

可以证明，对于任意的光束截面积分来说，$\hat{M}_{/\!/}$，$\hat{M}^2_{/\!/}$ 都是厄米算符，其相应的期待值 $M_{/\!/}$，$M^2_{/\!/}$ 也都恒为实数。以下将来证明 $M_{/\!/}$，$M^2_{/\!/}$ 都是与轴向坐标 z 无关的守恒量。利用(4)，(6) 两式以及厄米算符的性质，可以得到

$$M_{/\!/} = \frac{i}{\omega}\iint_{-\infty}^{\infty} \phi^* \left(x\frac{\partial \phi}{\partial y} - y\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8}$$

$$M^2_{/\!/} = \frac{1}{\omega^2}\iint_{-\infty}^{\infty} \left|x\frac{\partial \phi}{\partial y} - y\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9}$$

对光场复振幅分布函数 $\phi(x,y)$ 作傅里叶变换，可得到其空间频谱函数 $\psi(f_x, f_y)$，即

$$\psi(f_x, f_y) = F[\phi(x,y)] \tag{10}$$

利用傅里叶变换的性质，可得

$$M_{/\!/} = \frac{i}{\omega}\iint_{-\infty}^{\infty} \psi\left(f_x\frac{\partial \psi^*}{\partial f_y} - f_y\frac{\partial \psi^*}{\partial f_x}\right) \mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{11}$$

$$M^2_{/\!/} = \frac{1}{\omega^2}\iint_{-\infty}^{\infty} \left|f_x\frac{\partial \psi^*}{\partial f_y} - f_y\frac{\partial \psi^*}{\partial f_x}\right|^2 \mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{12}$$

而 由傅里叶光学可知[8,9]，对于相距为 z 的任意两个光束截面上的光场分布来说，它们的空间频谱函数有以下的简单关系

$$\psi_z = \psi_0 \exp\left(ikz\sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right) \tag{13}$$

利用(13)式，并经过一定的数学运算，可得

$$\psi_z\left(f_x\frac{\partial \psi_z^*}{\partial f_y} - f_y\frac{\partial \psi_z^*}{\partial f_x}\right) = \psi_0\left(f_x\frac{\partial \psi_0^*}{\partial f_y} - f_y\frac{\partial \psi_0^*}{\partial f_x}\right) \tag{14}$$

$$\left|f_x\frac{\partial \psi_z}{\partial f_y} - f_y\frac{\partial \psi_z}{\partial f_x}\right|^2 = \left|f_x\frac{\partial \psi_0}{\partial f_y} - f_y\frac{\partial \psi_0}{\partial f_x}\right|^2 \tag{15}$$

使用(14)，(15) 式的结果，可立刻从(11)，(12) 式得出，光束截面角动量的轴向分量 $M_{/\!/}$，角动量平方的轴向分量 $M^2_{/\!/}$ 都是与 z 无关的守恒量。

3　讨　论

3.1　若采用柱坐标系，则算符 $\hat{M}_{/\!/}$，$\hat{M}^2_{/\!/}$ 有更为简单的形式

$$\hat{M}_{/\!/}=\frac{i}{\omega}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{16}$$

$$\hat{M}^2_{/\!/}=\frac{-1}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{17}$$

这样，可把(8)，(9)式表示为

$$M_{/\!/}=\frac{i}{\omega}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathrm{d}s=\frac{1}{c}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_0^2\frac{\partial L}{\partial\theta}\mathrm{d}s+\frac{i}{\omega}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_0\frac{\partial\phi_0}{\partial\theta}\mathrm{d}s \tag{18}$$

$$M^2_{/\!/}=\frac{1}{\omega^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right|^2\mathrm{d}s=\frac{1}{c^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\phi_0^2\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial\theta}\right)^2\right]\mathrm{d}s \tag{19}$$

其中的 $\mathrm{d}s$ 为积分面元。这就是 $M_{/\!/}$，$M^2_{/\!/}$ 在柱坐标系中的表达式。由这两个表达式可知，$M_{/\!/}$，$M^2_{/\!/}$ 是和 ϕ 对角坐标 θ 的一阶偏导数密切相关的。若 ϕ 与 θ 无关，即有 $\partial\phi/\partial\theta=0$，则 $M_{/\!/}$，$M^2_{/\!/}$ 一定都为 0。

3.2　由文献[10]可知，任何满足 $AD-BC=1$ 的旋对称傍轴光学系统，都可表示为有限几个薄透镜与自由空间的简单组合。而上节已经证明了 $M_{/\!/}$，$M^2_{/\!/}$ 为自由空间传输过程中的守恒量，因而这种分解方式就意味着，如果 $M_{/\!/}$，$M^2_{/\!/}$ 经过任意焦距透镜的变换之后仍为守恒量，则它们经过任意的旋对称傍轴 $ABCD$ 光学系统之后也仍为守恒量。由于透镜对光场的变换作用只相当于乘上一个位相因子 $\exp[ikr^2/2f]$，而此因子与 θ 无关，代入(18)，(19)式可以发现，它不会改变 $M_{/\!/}$，$M^2_{/\!/}$ 的值，所以在经过透镜的变换之后，$M_{/\!/}$，$M^2_{/\!/}$ 仍为守恒量。这就证明了，$M_{/\!/}$，$M^2_{/\!/}$ 在经过任意 $ABCD$ 傍轴旋对称光学系统的传输之后也仍为守恒量。这一性质说明，要想改变 $M_{/\!/}$，$M^2_{/\!/}$ 的值(比如把厄米-高斯光束与拉盖尔-高斯光束进行相互转换)，使用旋对称的傍轴光学系统是做不到的，必须采用非旋对称的傍轴光学系统，比如使用柱透镜等光学系统。

3.3　把(18)，(19)式与文献[1]中的(1.32)式及(1.29)式进行比较，则可发现它们具有非常相似的形式，其区别在于用角坐标 θ 代替动量、能量表达式中的直角坐标 x，y。这种类比的相似性告诉我们，角动量对应于动量，而角动量平方则对应于能量。对于前一种对应关系，是非常易于理解的；而对于后一种对应关系，它在光流体模型中也是可以理解的，因为在光流体模型中，能量是和动量平方相一致的。可以证明

$$EE_j=P_j^2c^2,\qquad j=x,y$$

其中

$$E_j=\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\phi_0^2\left(\frac{\partial L}{\partial j}\right)^2+\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial j}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad E_\perp=E_x+E_y \tag{20}$$

$E_\perp$ 为光束截面能量的径向分量，E_j 为光束截面能量的 j 分量，E 为光束截面的总能量，且已满足归一化条件，即

$$E=\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_0^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1 \tag{21}$$

而 P_j^2，$\hat{P}_j^2$ 则为 j 方向的动量平方及其相应的算符

$$P_j^2=\iint_{-\infty}^{\infty}\phi^*(\hat{P}_j^2\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad j=x,y$$

$$\hat{P}_j^2=\frac{-1}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial j^2},\qquad j=x,y$$

$$P_{\perp}^2 = P_x^2 + P_y^2 \quad (22)$$

由于E已经归一化，而c^2又为常数，因而$E_{\perp}$与$P_{\perp}^2$是完全一致的。顺便说一下，在光流体模型中是用$E_{\perp}$来表示光束发散度的[1]，而在 Siegman 的二阶矩理论中则是用σ_i^2(它相当于$P_{\perp}^2/\lambda^2$)来表示光束的发散度的[11]。所以这种一致性还直接说明了光流体模型与二阶矩理论在描述光束发散度方面是完全等同的。

3.4 需要指出的是，光流体模型所定义的光束截面角动量密度与文献[4～7]中的单位长度轨道角动量密度是有所区别的，后者是与传统电动力学教科书中角动量的轨道部分相一致的，可以证明，在标量场近似的情况下，它恒为实数，且就是前者的实部，即光流体模型中所定义的轨道角动量密度[1]；但是在光流体模型中，虚数i被赋予了特殊的物理意义，它表示绕z轴转90°的算符，从而揭示出了隐含在虚部中的内禀角动量部分[1～3]。另外，由(18)，(19)式，角动量密度(轴向分量)的轨道部分、内禀部分分别与角动量平方密度(轴向分量)的轨道部分、内禀部分有以下的对应关系

$$\frac{1}{c^2}\phi_0^2\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\cdot\left|\frac{1}{c}\phi_0^2\frac{\partial L}{\partial \theta}\right|^2\cdot\left(\frac{\phi_0^2}{c^2}\right)^{-1} \quad (23)$$

$$\frac{1}{c^2k^2}\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\cdot\left|\frac{i}{\omega}\phi_0\frac{\partial \phi_0}{\partial \theta}\right|^2\cdot\left(\frac{\phi_0^2}{c^2}\right)^{-1} \quad (24)$$

其中的ϕ_0^2/c^2在光流体模型中具有特定的物理意义，它表示模型流体的质量密度[1]。(23)，(24)式表示的关系和轨道动量与轨道能量、内禀动量与内禀能量之间的关系[1]非常相似。这些对应关系从一定程度上反映了光流体模型把光束运动区分为轨道运动与内禀运动的正确性。

3.5 由(8)式与文献[1]中的(1.32)式可知，角动量密度的轴向分量$m_{/\!/}$与动量密度x,y分量p_x，p_y之间的关系为

$$m_{/\!/} = xp_y - yp_x \quad (25)$$

需要指出的是，这只是各个物理量密度之间的关系，而不是总值之间的关系。可以证明，在一般情况下，当$P_x=0$，$P_y=0$时，$M_{/\!/}$不一定为0；但是当ϕ为旋对称的光场分布时，则$M_{/\!/}$一定为0。

3.6 由于自旋角动量是与光场的偏振情况相联系的，而标量场理论又不能反映偏振态方面的信息，所以在标量场近似下是很难得到自旋角动量方面的性质的；要得到自旋角动量方面的特性，必须采用矢量场理论。文献[5]证明了，在傍轴矢量场近似的情况下，自旋角动量(单位长度)的轴向分量也是一个与轴坐标z无关的守恒量；而文献[2,3]则更加深入地分析了自旋角动量与内禀角动量之间的关系。

参 考 文 献

1 邓锡铭．有限束宽光动力学．杭州：杭州大学出版社，1993

2 邓锡铭，盛国平．电磁场的内禀角动量．中国激光，1990，17(7)：394

3 Deng Ximing. Intrinsic angular momentum of the electromagnetic field. *Laser and Particle Beams*, 1992, **10**(1): 117

4 L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw *et al.*. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys. Rev. A*, 1992, 45(11): 8185

5 S. J. van Enk, G. Nienhuis. Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light. *Opt. Commun.*, 1992, **94**(1,2,3): 147

6 S. C. Tiwari. Geometric phase in optics, quantal or classical? *J. of Modern Optics*, 1992, **39**(5): 1097

7 S. J. van Enk. Geometric phase, transformations of Gaussian light beams and angular momentim transfer. *Opt.*

Commun., 1993, 102(1,2) : 59
8 黄婉云．傅里叶光学教程．北京：北京师范大学出版社，1985
9 J. W. 顾德门．傅里叶光学导论，北京：科学出版社，1979. 4
10 吕百达．激光光学．成都：四川大学出版社，1992
11 A. E. Siegman. New developments in laser resonators. *Proc. SPIE*, 1990, 1224 : 2

The Axial Component of Beam Cross-section Angular Momentum is Conserved

Cao Qing　Guo Hong　Deng Ximing

(*National Laboratory on High Power Laser and Physics*, *Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics*, *Academia Sinica*, *Shanghai* 201800)

Abstract　In this paper, we prove that, for any stable propagating light beam in vacuum or in the symmetrically paraxial *ABCD* system, the z components of beam cross-section angular momentum and angular momentum square are both invariables which are independent of the position of the cross-section. Furthermore, we still discuss some characters of light beam which are relative to angular momentum.

Key words　HMO, beam cross-section angular momentum