第23卷 第2期
1996年2月

中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS

Vol. A23, No. 2
February, 1996

超高斯光束的上限阶数 *

邓锡铭 曹 清 郭 弘

(中国科学院上海光机所 高功率激光物理国家实验室，上海 201800)

提要 使用光流体模型理论证明了超高斯光束的阶数不可能为无穷大，而是存在一个上限；推出了这个上限阶数 n_0 的表达式，并对一些与此相关的问题进行了讨论。

关键词 超高斯光束，光流体模型

1 引 言

超高斯光束是目前研究得较为热烈的一种光束，它是包含有高斯光束($n = 2$)、理想平顶方波($n = \infty$)在内的一大类光束。至今，人们已对这种光束的产生方法以及传输规律进行了大量的研究，并得到了一些具有实用价值的结果[1~5]。但是尚未见文献研究过超高斯光束的存在性问题，即是否所有数学上描述的超高斯光束都是物理上能够存在的？如果不是，那么满足什么样条件的超高斯光束才是物理上能够实现的？本文将回答这个问题，并且为了分析方便，本文将和文献[4,5]一样，只把所讨论的范围限定于在其光腰面上准程函 L 与 x，y 坐标无关的超高斯光束。首先，本文将用光流体模型理论中的光束截面能量及其径向分量 $E_\perp$ 的概念，来证明超高斯光束的阶数 n 不可能为无穷大，即理想的平顶方波在物理上是不可能实现的。在此基础上，将进一步采用匀幅平面波入射狭缝所自然形成的陡峭光束作为同样宽度的超高斯光束的上限，来给出上限超高斯阶数 n_0 的表达式。此外，本文还将对一些相关的问题进行讨论。

2 超高斯光束的阶数不可能为无穷大

由文献[6]可知，满足标量亥姆霍兹波动方程

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \tag{1}$$

的解可表示为

$$\phi = \phi_0 e^{-ikL}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2}$$

其中，ϕ_0 为振幅，L 为准程函，它们都是空间坐标(x,y,z)的实函数。为了分析方便，假定 ϕ 已经满足归一化条件，即

* 国家高技术 863-416 资助项目。

收稿日期：1995年3月28日；收到修改稿日期：1995年5月12日

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\phi^{*}\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_0^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1 \tag{3}$$

由(1),(2)式可得

$$\phi_0^2=\phi_0^2(\nabla L)^2+\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)^2-\frac{1}{2k^2}\nabla^2\phi_0^2 \tag{4}$$

把(4)式对整个截面积分,可得

$$1=\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\phi_0^2(\nabla L)_\perp^2+\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)_\perp^2-\frac{1}{2k^2}(\nabla^2\phi_0^2)_\perp\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\phi_0^2(\nabla L)_{/\!/}^2+\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)_{/\!/}^2-\frac{1}{2k^2}(\nabla^2\phi_0^2)_{/\!/}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5}$$

引用远场边界条件则可证明,在 $\partial\phi_0^2/\partial x$, $\partial\phi_0^2/\partial y$ 存在并连续的情况下,有

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2k^2}(\nabla^2\phi_0^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{6}$$

因而可把(5)式表示为

$$1=E_\perp+E_{/\!/} \tag{7}$$

其中

$$E_\perp=\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\phi_0^2(\nabla L)_\perp^2+\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)_\perp^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8}$$

$$E_{/\!/}=\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\phi_0^2(\nabla L)_{/\!/}^2+\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)_{/\!/}^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9}$$

它 们分别表示光束截面能量的径向部分与轴向部分。由于 $E_\perp$, $E_{/\!/}$ 都为非负实数,因而应该有以下的关系成立

$$E_\perp\leq 1 \tag{10}$$

满足能量归一化条件的一维超高斯光束的振幅分布函数为

$$\phi_0=a\exp\left(-\left|\frac{x}{\sigma}\right|^n\right) \tag{11}$$

其中的 σ 为超高斯光束的束宽,a 为归一化系数,其值为

$$a^2=\frac{n(2)^{1/n}}{2\sigma\Gamma(1/n)} \tag{12}$$

符号 Γ 表示 Γ 函数。由于所讨论的超高斯光束在光腰截面上具有均匀的准程函 L,因而在该横截面上任一点处都有

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0 \tag{13}$$

把(11),(12),(13)式代入(8)式,则可得到一维超高斯光束的 $E_\perp$ 为

$$E_\perp=\frac{(4)^{1/n}\Gamma(2-1/n)n}{4k^2\sigma^2\Gamma(1+1/n)} \tag{14}$$

由 Γ 函数的性质可知,当 $n\gg 1$ 时,有

$$\Gamma\left(2-\frac{1}{n}\right)\approx\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\approx 1 \tag{15}$$

且 n 的值越大,(15)式就越精确;另外,当 n 较大时,还可得到

$$(4)^{1/n} \approx 1 \tag{16}$$

这样，在 n 较大时，有

$$E_\perp \approx \frac{n}{4k^2\sigma^2} \tag{17}$$

由(17) 式可知，在超高斯光束的束宽 σ 值确定的情况下，且 n 值较大时，$E_\perp$ 随 n 的增大而成线性增大。当 $n \to \infty$ 时，$E_\perp$ 也趋向于 ∞，而由(10) 式可知，$E_\perp$ 不可能大于 1，由此可以得到超高斯光束的阶数 n 不可能为无穷大，即理想的平顶方波在物理上是不可能实现的。

3　超高斯光束的上限阶数

考虑到物理上能够实现的最陡的超高斯光束莫过于用匀幅平面波入射硬边光阑所自然形成的边缘梯度，所以我们用具有与 σ 值相同的同宽度的无限长狭缝截取匀幅平面波所形成的光场分布来作为一维超高斯光束的上限，这在物理上是合理的。

由光流体模型理论可知[6]，光束截面能量的径向分量 $E_\perp$ 是一个与轴向坐标 z 无关的守恒量，它由轨道能量部分与内禀能量部分所组成。对于被硬边光阑所截取的光束来说，在无穷远处，其 $E_\perp$ 的内禀能量部分为 0，只有轨道能量部分；而在光阑截面处，则 $E_\perp$ 的轨道能量部分为 0，只有内禀能量部分。文献[6,7] 推出了通过硬边光阑的光束在远场截面上的轨道能量的表达式，并由此给出了它在光阑截面处的 $E_\perp$ 为

$$E_{\perp 0} = \frac{1}{2k}\,\frac{l}{A} \tag{18}$$

其中 A 为硬边光阑面积，l 为硬边光阑的周长。将狭缝的参数代入，可得匀幅光入射单位长度狭缝的 $E_\perp$ 为

$$E_{\perp 0} = \frac{1}{2k\sigma} \tag{19}$$

在光腰截面上取 $E_\perp = E_{\perp 0}$，则可由(14) 式与(19) 式得到

$$\frac{(4)^{1/n_0}\Gamma(2 - 1/n_0)}{\Gamma(1 + 1/n_0)}\, n_0 = \frac{4\pi\sigma}{\lambda} \tag{20}$$

由(20) 式所确定的 n_0 即为束宽为 σ 的超高斯光束的上限阶数。

在 $\sigma \gg \lambda$ 的情况下，即当 n_0 较大时，(15) ～ (17) 式成立，这时 n_0 有一个简单的表达式

$$n_0 \approx \frac{4\pi\sigma}{\lambda} \tag{21}$$

对于二维的轴对称超高斯光束来说，其振幅表达式为

$$\phi_0 = b\exp\left(-\left|\frac{r}{\sigma}\right|^n\right) \tag{22}$$

其中

$$b^2 = \frac{(4)^{1/n}}{\pi\sigma^2\Gamma(1 + 2/n)} \tag{23}$$

将(23) 式代入(8) 式，可得到其 $E_\perp$ 为

$$E_\perp = \frac{(4)^{1/n} n}{2k^2\sigma^2\Gamma(1 + 2/n)} \tag{24}$$

而由(18) 式可得到半径为 σ 的硬边光阑的 $E_\perp$ 为

$$E_{\perp 0} = \frac{1}{k\sigma} \tag{25}$$

由(24)，(25)式可得

$$\frac{(4)^{1/n_0} n_0}{\Gamma(1 + 2/n_0)} = \frac{4\pi\sigma}{\lambda} \tag{26}$$

由(26)式所确定的 n_0，就是二维轴对称超高斯光束的上限阶数。当 $\sigma \gg \lambda$ 时，(26)式就简化为

$$n_0 \approx \frac{4\pi\sigma}{\lambda} \tag{27}$$

它与(21)式是完全相同的。从以上的推导过程可以看出，超高斯光束存在上限阶数的物理原因在于这种光束(当 $n > n_0$ 时)蕴含了与亥姆霍兹方程相抵触的内在特性，故由此可知，其深层的物理机制在于受到了光波的衍射效应所限。

4　讨　论

4.1　由文献[8]可知，准程函 L 所满足的一个微分方程为

$$(\nabla L)^2 = 1 + \frac{1}{k^2}\frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0} \tag{28}$$

由于理想方波不可能存在，它导致 $\partial^2\phi_0/\partial x^2$ 的值不可能为无穷大，所以由(28)式可知，$|\partial L/\partial x|$ 的值也应有限，它不可能为无穷大。这表明了准程函的突变在物理上也是不可能的。

4.2　在光束的传输过程中，它的空间、时间传输特性非常相似，而由这种时空类比的相似性可知，一个物理上能够存在的光脉冲也不可能具有无限陡的上升沿与下降沿。若用超高斯函数来表示，则可表述为：一个时间上的超高斯脉冲的超高斯阶数也应是有限的，而不可能为无穷大。

4.3　在 n 确定的情况下，我们可以采用让 $\sigma \to \infty$ 的方法来趋向于匀幅平面波。但是应当注意，从严格的意义上来讲，只有当 n 为整数时，ϕ_0 才能趋向于真正意义上的匀幅平面波，因为当 n 不是整数时，ϕ_0 的第 N(N 为 n 的整数部分)阶导数以及高于 N 阶的所有导数都会在 $x = 0$ 处发散。这偏离了近匀幅平面波所应具有的性质，对于近匀幅平面波来说，它的任意阶导数在任意点处都应趋向于0。但是从应用的观点来说，这种趋近匀幅平面波的方法作为一种近似的描述还是可以的，因为毕竟在所有 $x \neq 0$ 的点上，光束的性质都会趋向于匀幅平面波的性质；而即使在 $x = 0$ 的这一点上，ϕ_0 的前 N-1 阶导数的性质也还都趋向于匀幅平面波的性质。

4.4　如上节所述，(6)式成立的条件为 $\partial\phi_0^2/\partial x$，$\partial\phi_0^2/\partial y$ 存在且连续，但是对于一维的超高斯光束来说，可以证明，当 $n < 1$ 时，$\partial\phi_0^2/\partial x$ 在 $x = 0$ 处有一奇异点，它使得(6)式不再成立，所以当 $n < 1$ 时，(14)式有可能会给出错误的结果。故(14)式的适用范围应为 $n \geq 1$。如果把光束所包含的总能量应当有限(要求 ϕ 平方可积)、而微分形式的亥姆霍兹方程又不被破坏(它要求 ϕ 的二阶偏导数为有限值)这两个条件也作为超高斯光束存在的先决条件，则由以上分析可知，其下限阶数为1。因为当 $0 < n < 1$ 时，在 $x = 0$ 处，$\partial^2\phi/\partial x^2$ 的值为无穷大；而当 $n = 0$ 时，ϕ_0^2 在整个横截面上的积分又发散，所以也是不可能存在的。另外，根据这两个条件，还可以得到：所有小于2的非整数阶超高斯光束都不可能存在，而所有大于2且又小于 n_0 的非整数阶超高斯光束则可以存在。

参 考 文 献

1 S. De Silvestri, P. Laporta, V. Magni *et al.*. Solid-state laser unstable resonators with tapered reflectivity mirrors; The super-Gaussian approach. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1988, QE-24(6) : 1172

2 S. De Silvestri, V. Magni, O. Svelto *et al.*. Lasers with super-Gaussian mirrors. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1990, QE-26(9) : 1500

3 J. Ojeda-Castaneda, G. Saavedra, E. Lopez-Olazagasti. Supergaussian beams of continuous orders as GRIN modes. *Opt. Commun.*, 1993, 102(1,2) : 21

4 C. Palma, V. Bagini. Propagation of super-Gaussian beams. *Opt. Commun.*, 1994, 111(1,2) : 6

5 A. Parent, M. Morin, P. Lavigne. Propagation of super-Gaussian field distributions. *Opt. Quant. Electr.*, 1992, 24 : S1071

6 邓锡铭．有限束宽光动力学．杭州：杭州大学出版社，1993

7 邓锡铭，方洪烈，黄镇江 等．光束通过硬边光阑的内禀能量和衍射发散度．激光，1981，8(12)：1

8 邓锡铭，方洪烈．在真空中电磁场的整体运动和内部运动．激光，1980，7(2)：14

The Upper Limit of the Order of the Supergaussian Beams

Deng Ximing Cao Qing Guo Hong

(*National Laboratory on High Power Laser and Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai* 201800)

Abstract In this paper, we prove that the order of a supergaussian beam has a upper limit, drive the analytic expression of the upper limit, and discuss some important characters of the supergaussian beams.

Key words supergaussian beams, HMO