

波导自由电子激光带能散度非定态增益

束小建

(北京应用物理与计算数学研究所 863, 北京 100088)

提要 推导了带能散度的波导自由电子激光高、低两共振频率支的非定态增益解析公式,给出了近似显式公式,与数值模拟结果符合很好。从所得增益脉冲分布,估算了克服呆滞效应所需腔长失谐值,在时空框架内解释了自锁模机制。

关键词 自由电子激光,波导,增益,非定态

1 引言

自由电子激光(FEL)在远红外光谱区具有广泛的应用前景。国内外许多实验室都在建造工作在远红外至毫米波谱区的FEL装置^[1~6]。由于波长较长,波导常被采用以束缚光场,增强其与电子束的横向叠合。此外,波导还带来一系列新特点,影响增益和线宽^[3,5],可以控制滑移,改变激光脉冲长度、形状和光谱结构^[1,5]。在文献[5]中,作者推导了波导FEL定态小信号低增益和高增益区指数增长率公式,数值计算了非定态增益,分析了滑移、波导对增益的影响,指出滑移对高增益的影响比低增益大,但通过调节波导间隙,在高增益区可以更充分地消除滑移。在文献[3]中,作者数值计算了滑移、电子束能散度对高、低两共振频率支增益的影响,并给出了能散度的允许值。本文进一步推导了带能散度的增益解析公式。证实了带波导时能散度引起的增益下降比无波导时小,降低了对能散度的要求;能散度对低频支的增益的影响比高频支小^[3,5]。比较了解析公式、近似显式公式、数值模拟结果,三者符合很好。近似公式可以快捷、方便地计算能散度对增益的影响。本文还推导了非定态低增益公式,给出了增益在脉冲中的分布。分析比较了正、反向滑移的影响。同数值模拟结果进行了比较,图像一致,数据符合。在此基础上,估算了克服激光呆滞效应所需腔长失谐值,在时空框架内解释了自锁模机制。

2 考虑能散度的增益近似公式

在小信号分析中,只考虑电子相位的调制变化而忽略其它参数的变化^[5],采用文献[5]相同的步骤,可推导出考虑能散度的低增益区增益:

$$G = 2AL^3 \langle g(o_L) \rangle_{\nu_0} \quad (1)$$

上式中各参量的定义见文献[5]。 o_L 是电子纵向速度的函数,因此也是电子初始能量 ν_0 的函数, $\langle \rangle_{\nu_0}$ 代表对电子初始能量的平均。 o_L 可以写成更明显的形式:

$$\theta_L = \theta_c + 4\pi N f_w \frac{\Delta\gamma}{\gamma_c} \tag{2}$$

$$f_w = \frac{K_s}{K_w} \frac{\mu^2}{2\beta_c^2 \gamma_c^2} = \frac{K_s}{K_f} \tag{3}$$

这里 $\Delta\gamma = \gamma_0 - \gamma_c$ 是能散, $\theta_c = (K_w + K_s - K_s/\beta_c)L$, β_c, γ_c 是电子束平均纵向速度和平均初始能量, K_f 是无波导即自由空间时的共振光波数。

假设电子束能散度是高斯分布 $\exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right]/\sqrt{\pi\sigma}$, (1) 式化为

$$G(\theta_c) = 2AL^3 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \text{tg}(\theta_c + \theta_c t) e^{-t^2} \tag{4}$$

$$\theta_c = 4\pi N f_w \sigma \tag{5}$$

(4) 式右边是增益线型函数 g 与电子分布函数的卷积, 将引起增益曲线展宽、峰值点右移(波长红移)和峰值下降。

本文研究作用最明显、最重要的最后一项效应。用三角函数来近似增益线型函数 g , 积分可以积出, 在增益极值点 $\theta_c = 2.6$, 增益

$$G = G_0 \exp\left[-\left(\frac{\theta_c}{4}\right)^2\right] \tag{6}$$

图 1 比较了数值模拟、(4)式、(6)式的结果, 三者符合很好。(6)式可以用来快捷、方便地计算波导 FEL 中能散度对增益的影响。

波导 FEL 中, $K_s < K_f, f_w < 1$, 能散度导致的增益下降比无波导时要小, 对能散度的要求低。由于 $f_w \propto K_s$, 能散度对低频支增益的影响要小于对高频支的影响。进一步证实了文献[3]的结果。

考虑因子 f_w , 已有的考虑能散度的高增益线性区指数增长率的公式^[6]可以直接推广到带波导时的情况。

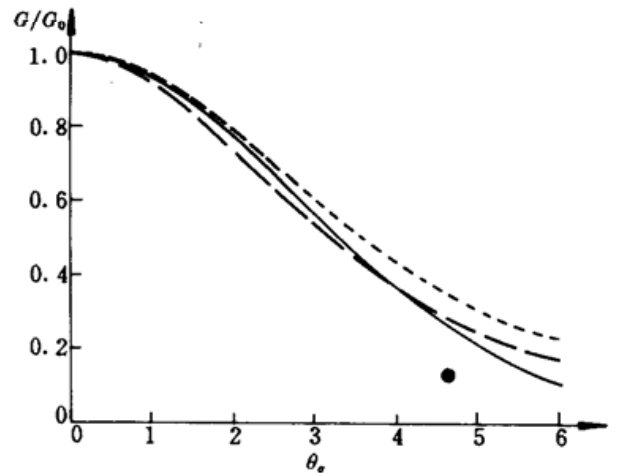


Fig. 1 The gain reduction factor G/G_0 due to energy spread is plotted against θ_c (see the text). The dotted line displays the results of the numerical simulations, the solid line the approximate formula (6), and the dashed line the analytic formula (4)

3 非定态低增益公式

作变换 $\xi = z/L, \tau = t - z/c\beta_0$, 一维波导 FEL 方程[文献[5]的(1~4)式]可以写成:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -|a| \sin(\theta + \phi) \tag{7a}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = v \tag{7b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - s \frac{\partial}{\partial \tau}\right)a = i\rho \langle e^{-i\omega} \rangle \tag{7c}$$

其中 $s = \frac{L}{c} \left(\frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{\beta_g}\right)$ 是滑移时间, $a = |a|e^{i\omega} = \frac{K_s^2 a_w \mu^2 (J_0 - J_1) f_r L^2}{2\beta_0 \gamma_0^4} a_s$ 是归一化光场场强, $\rho = \frac{2\pi e}{mc^3} \frac{I}{S_w} \frac{a_w^2 \mu^2 (J_0 - J_1)^2 f_r^2 L^3}{\beta_0^5 \gamma_0^5} \frac{K_s^2}{K_s}$ 是归一化电子束密度, $S_w = \frac{1}{2}ab$ 是 TE_{01} 模面积, f_r 是 TE_{01} 模和电

子束的横向叠合因子。

对(7a)、(7b)式积分,代入(7c),对指数上的二阶量作展开近似^[5],得:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - s \frac{\partial}{\partial \tau}\right)a = \frac{i}{2}\rho e^{-i\nu_0^2 \tau} \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} d\xi a e^{i\nu_0^2 \tau} \quad (8)$$

作变换 $u = \xi, v = \tau + s\xi$, (8) 式化为:

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{i}{2}\rho(v - su)e^{-i\nu_0^2 u} \int_0^u du \int_0^u du a(u, v - su)e^{i\nu_0^2 u} \quad (9)$$

小信号近似下, a 可提到积分号外,对(9)式积分

$$G(v) \equiv \frac{a(1, v) - a(0, v)}{a(0, v)} = \frac{i}{2}\rho \int_0^1 h(u) du X(v - su) \quad (10)$$

$$h(u) = \frac{e^{-i\nu_0^2 u} - 1 + i\nu_0 u e^{-i\nu_0^2 u}}{v_0^2} \quad (11)$$

$$X(v) = \begin{cases} 1 & 0 \leq v \leq s_b \\ 0 & v < 0, \text{ 或 } v > s_b \end{cases} \quad (12)$$

(1) 正向滑移 $s > 0$

增益区 $0 \leq v < s$:

$$G(v) = \frac{i}{2}\rho \int_0^{v/s} h(x) dx \quad (13a)$$

稳定区 $s \leq v < s_b$:

$$G(v) = \frac{i}{2}\rho \int_0^1 h(x) dx \equiv G_s \quad (13b)$$

逃逸区 $s_b \leq v \leq s_b + s$:

$$G(v) = \frac{i}{2}\rho \int_{(v-s_b)/s}^1 h(x) dx \quad (13c)$$

平均增益

$$\bar{G} = \frac{1}{s_b + s} \int_0^{s_b+s} dv G(v) = \frac{1}{1 + \mu_s} G_s \quad (14)$$

其中 $\mu_s = s/v_0$ 是滑移参数, s_b 是电子束脉冲长度。

(2) 反向滑移 $s < 0$

逃逸区 $s \leq v \leq 0$:

$$G(v) = \frac{i}{2}\rho \int_{v/s}^1 h(x) dx \quad (15a)$$

稳定区 $0 < v \leq s_b + s$:

$$G(v) = \frac{i}{2}\rho \int_0^1 h(x) dx = G_s \quad (15b)$$

增益区 $s_b + s < v \leq s_b$:

$$G(v) = \frac{i}{2}\rho \int_0^{(v-s_b)/s} h(x) dx \quad (15c)$$

$$\bar{G} = \frac{1}{1 - \mu_s} G_s \quad (16)$$

利用 $\int dx h(x) = \frac{1}{v_0^2} (2ie^{-i\nu_0^2 \tau} - v_0 x - v_0 x e^{-i\nu_0^2 \tau})$, 将上下积分限代入, (13)、(15) 式可以化为显式, 在此不一一写出。

图 2 将(13)、(15) 式和基于(7) 式的一维数值模拟结果进行了比较, 图像一致, 符合很好。正、反向滑移三个区域的顺序正好相反, 但各个区增益对 v, ρ 的函数关系一样。修正了文献[3]的结果, 由于用滑移长度而非滑移时间对文献[3] 中图 1 归一, 得到了同样滑移程度下, 反向滑

移比正向滑移引起更多增益下降的不当结论。然而，由于 $|s|$ 大，由(16)式，增益下降大。此外，由于 $\rho \propto K_z^2/K_x$ ， ρ 小，因此，通常低频支增益低，被抑制，有利于 FEL 工作在有用的高频支。

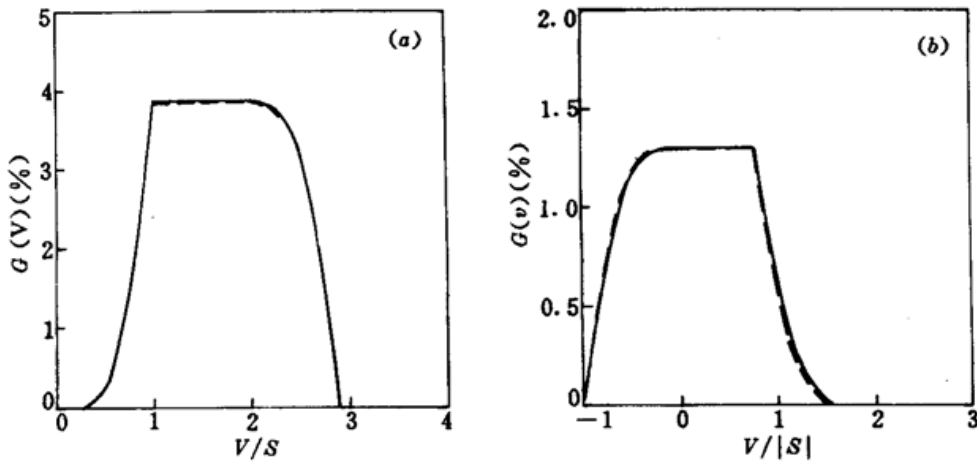


Fig. 2 The shape of the optical micropulse at the 1st pass has an initial uniform distribution. The solid lines are from the numerical simulations and the dotted lines from the analytic formulas (13) and (15)

(a) positive slippage, $s > 0$; (b) negative slippage, $s < 0$

由(13)~(16)式，非定态的共振波长、增益曲线形状等与定态相同。乘上(6)式中能散度引起的增益下降指数型因子，就得到带能散度的非定态增益公式。

非定态增益有助于理解一些重要的非定态、非线性效应和现象。我们以所得非定态增益公式为基础，研究两个效应如下。

4 激光呆滞效应

如图 2 所示，由于滑移，电子束放大光脉冲的后沿部分。在短脉冲 $\mu_s > 1$ 情况下，光脉冲质心后移严重，光质心的传输速度小于电子纵向速度，逐渐滞后，影响其与电子束的叠合。增益持续下降，甚至使激光器不能起振。即所谓激光呆滞效应^[7]。克服的方法是轻微缩短光腔长度，使光脉冲与下一个电子微脉冲叠合。所需腔长失谐值一般只能通过大量的数值模拟计算得到。

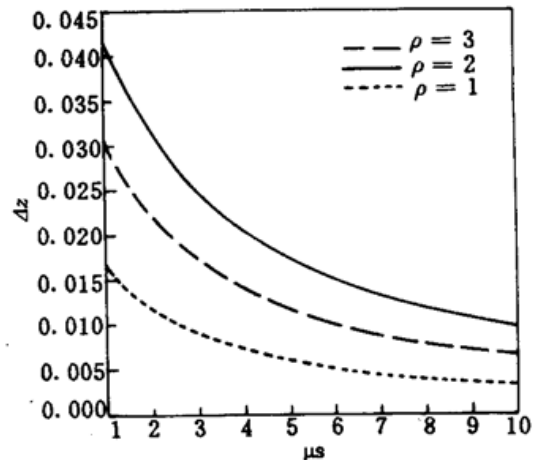


Fig. 3 The delay of the optical pulse centroid between the 2nd and the 1st passes. Normalized to slippage time s

由(13)式可以计算光脉冲质心。计算相邻两个 pass 的光脉冲质心的推迟见图 3。由此可得：所需最小腔长失谐值为该推迟值的一半。

5 自锁模机制

通过锁模，可以得到品质好的短脉冲激光。静电加速器驱动 FEL 的自锁模现象已被实验观测到^[8]。E. Jerby 等人在频谱框架内进行了理论分析^[9]，并进行了 AM 锁模 FEL 实验。在上节的基础上，在时空框架内可以更清晰地解释自锁模机制。第 1 通后光脉冲形状如图 2(a)，但

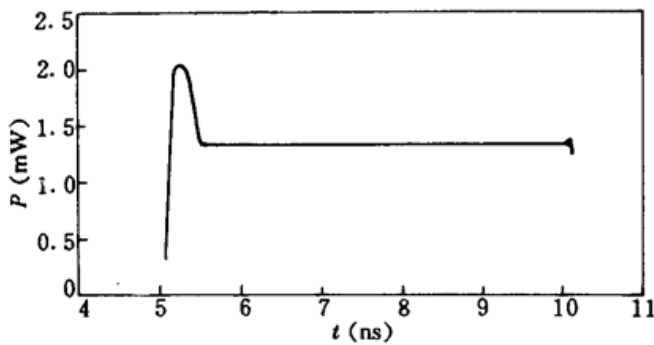


Fig. 4 The shape of the optical micropulse at the 2nd pass driven by a long electron pulse

后面没有逃逸区。在经光腔返回后的第2通中,由于光速快,其前沿长度为 $s_0 = \frac{2L_0}{c} \left(\frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{\beta_s} \right)$ (L_0 是光腔长度) 的部分将赶上一部分电子束,而该部分电子束在第1通中已经被光场群聚作用过,因此,该前沿部分将被更多地放大。当 FEL 工作在低净增益状态时,其余的平台部分得不到增长,光脉冲的前沿部分得到增长,如图4所示。这样形成自锁模振荡,出现周期为2倍腔长的短脉冲系列,其宽度取决于 s_0 和波导色散作用,约为1至2个滑移长度。

参 考 文 献

- 1 F. Ciocci, R. Bartolini, A. Doria *et al.*. Operation of a compact free-electron laser in the millimeter-wave region with a bunched electron beam. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, 70 : 928
- 2 Y. C. Huang, J. Schmerge, J. Harris *et al.*. Compact far-IR FEL design. *Nucl. Instr. Meth.*, 1992, A318 : 765
- 3 X. J. Shu, Y. Kawamura, T. Tanabe *et al.*. Competition between two resonance frequency branches in a waveguide free-electron laser. *J. Appl. Phys.*, 1995, 77 : 426
- 4 束小建, 丁武, 张治畴等. 远红外自由电子激光器的整体数值模拟方法. *强激光与粒子束*, (待发表)
- 5 Xiaojian Shu. Gain analysis of a waveguide free electron laser. *Opt. Commun.*, 1994, 105 : 188
- 6 G. T. Moore. The high-gain regime of the free electron laser. *Nucl. Instr. Meth.*, 1985, A239 : 19
- 7 H. Al-Abawi, F. A. Hopt, G. T. Moore *et al.*. Coherent transients in the free-electron laser; laser lethargy and coherence brightening. *Opt. Commun.*, 1979, 30 : 235
- 8 Y. Kawamura, B. C. Lee, M. Kawai *et al.*. Observation of periodical short pulse trains in free-electron laser oscillations. *Appl. Phys. Lett.*, 1989, 51 : 795
- 9 E. Jerby, G. Bekefi. AM mode-locking of a free-electron laser oscillator. *IEEE. J. Quant. Electr.*, 1993, QE-29 : 2845

Gain in Non-steady State Waveguide Free Electron Lasers by Taking into Account Energy Spread

Shu Xiaojian

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088)

Abstract The analytic expression of gain for both frequencies in non-steady state waveguide free electron lasers is derived by taking into account axial energy spread of electron beams. The approximate explicit expression is also given. They agree well with numerical simulations. Based on the non-steady state gain, the necessary detuning of cavity length to counteract the effect of lethargy is estimated, and the mechanism of self mode-locking is explained clearly in time domain.

Key words free electron laser, waveguide, gain, non-steady state