

# 傍轴黎曼几何光学. II. 应用基础\*

邓锡铭 郭弘 曹清

(中国科学院上海光机所 高功率激光物理国家实验室, 上海 201800)

**提要** 利用微分几何方法研究光束传输。从黎曼三维流形的曲率出发,构造了一个复空间。它的流线能兼容几何光学与波动光学的信息。列举了复空间应用于光束传输的一些例子。

**关键词** 微分几何学, 三维黎曼流形, 光流体模型, 广义光折射率, 复空间, 光束传输

## 1 引言

本文作者之一邓锡铭等建立了一个光流体模型(简称 HMO)<sup>[1]</sup>,用以描写稳态光束的传输。最近,郭弘等<sup>[2~5]</sup>从费马原理出发,应用微分几何方法,建立了三维黎曼流形,给出了能够描写光束传输的几何量;并推广了 HMO 的广义光折射率概念,将几何光学和波动光学行为统一地纳入三维黎曼流形之中。这样在自由空间衍射传输的光束,就可以用黎曼空间中的直线束来描写。

我们在文献[6]中讨论了在一条衍射光线上的任一点,如何利用它附近的振幅分布来确定与衍射光线相对应的黎曼流形的指向,本文将利用文献[6]的结果,在普通三维空间中引入复数坐标,构造一个复空间,来连结黎曼空间和普通空间,使包含衍射、干涉在内的光束传输的描写变得非常简明和几何光学化。

## 2 复数坐标空间

考虑在自由空间以  $z$  轴为传输轴的任一单色、线偏振傍轴光束,它在远场区域的  $\frac{1}{k^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0}$  项显然趋于零,两个空间的流线和衍射光线处处重合并且都是直线。当离开远场区,  $\frac{1}{k^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0}$  一般不再等于零,这样,在普通空间的衍射光线就与黎曼空间三维流形的直线束分离。这种分离可分解为两部分,(a) 衍射光线的切线(沿波矢  $k$  方向)与同一点的黎曼流线不再重合;(b) 衍射光线迹偏离黎曼流线的直线迹。显然,两部分偏离均起因于黎曼空间的弯曲。现设空间弯曲激发的能量归一化密度为  $W_R/\phi_0^2$ (它是一个无量纲的量),  $\phi_0^2$  是傍轴光束时间平均能量密度。然后从两个空间线束的角偏离量来确定  $W_R$ 。

在非远场区,黎曼流线与  $z$  轴的夹角  $u_r$ (用弧度表示)应满足下式

\* 国家高技术 863-416 资助项目。

$$u_z^2 = \left| \left[ (\nabla_z L)^2 \pm \frac{1}{k^2} \frac{\nabla_z^2 \phi_0}{\phi_0} \right] - \frac{W_{Rz}}{\phi_0^2} \right| \quad (1)$$

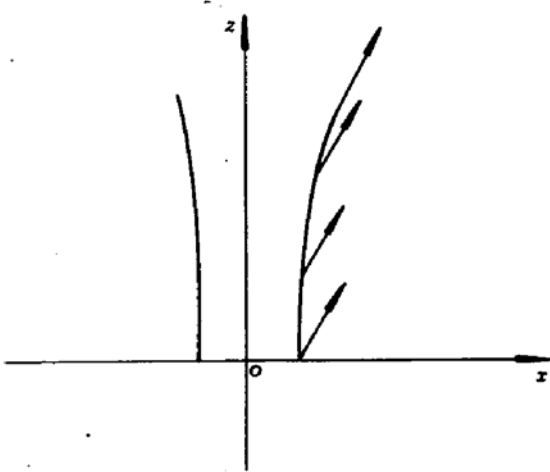


Fig. 1 The directions of the 3-D Riemannian manifold

同时,由于空间弯曲,黎曼空间一条直的流线在普通空间就转换成一条弯的衍射光线。但是,在同一条衍射光线上的任何点都应具有相同的  $u_z$  值,并都应等于该衍射光线在远场区的波矢  $k$  与  $z$  轴的夹角(见图 1)。满足这个条件的  $W_R$  应取以下数值

$$W_R = (\sqrt{R}/2k)\phi_0^2 \quad (2)$$

或 
$$W_R/\phi_0^2 = \sqrt{R}/2k \quad (3)$$

$R$  是三维黎曼流形的曲率。式子右边含  $k^{-1} = (2\pi)^{-1}\lambda$  表明,同样的空间曲率,光波长越长,空间弯曲的激发能量越大;反之,波长越短,则越小。

对于傍轴光束,  $R$  及广义光折射率  $n_\sigma$  近似等于

$$R \cong 4\nabla^2 n_\sigma, \quad n_\sigma \cong 1 + \frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0} \quad (4)$$

此外

$$R_x \cong 4\nabla_x^2 n_\sigma, \quad W_{R_x} \cong \frac{\sqrt{R_x}}{2k} \phi_0 \quad (5)$$

$$R_y \cong 4\nabla_y^2 n_\sigma, \quad W_{R_y} \cong \frac{\sqrt{R_y}}{2k} \phi_0 \quad (6)$$

对于  $y$  分量,同样有

$$u_y^2 = \left| \left[ (\nabla_y L)^2 \pm \frac{1}{k^2} \frac{\nabla_y^2 \phi_0}{\phi_0} \right] - \frac{W_{R_y}}{\phi_0^2} \right| \quad (7)$$

现举一维高斯光束为例,以检验  $W_R$  的正确性

$$\phi = \phi_0 \exp(ikL), \quad \phi_0 = a \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \quad (8)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{k^2 \sigma_0^2} (k^2 \sigma_0^4 + 4z^2) \quad (9)$$

$$L = z + \frac{x^2}{2R'} + \frac{1}{k} \tan^{-1}\left(\frac{k\sigma_0^2}{2z}\right) \quad (10)$$

$$R' = k^2 \sigma_0^2 \sigma^2 / 4z \quad (11)$$

$$\frac{1}{k^2} \frac{\nabla_x^2 \phi_0}{\phi_0} = \frac{4x^2}{k^2 \sigma^4} - \frac{2}{k^2 \sigma^2} \quad (12)$$

式中  $a$  为归一化系数,  $L$  为准程函(为与几何光学中的程函相区别),  $\sigma_0$  为光腰半径,  $R'$  为等位相面曲率半径,  $\sigma$  为光束半径。由以上参数计算得到

$$R = 16/k^2 \sigma^4 \quad (13)$$

$$W_{R_x}/\phi_0^2 = 2/k^2 \sigma^2 \quad (14)$$

$$(\nabla_x L)^2 = \left(\frac{x}{R'}\right)^2 = \frac{16x^2 z^2}{k^4 \sigma_0^4 \sigma^4} \quad (15)$$

考虑任意一条衍射光线,它与光腰面相交的横截距为  $x_0$ ,则有

$$x = x_0(\sigma/\sigma_0) \quad (16)$$

故在同一条衍射光线上的任一点处的  $(\nabla_z L)^2$  及  $\frac{1}{k^2} \frac{\nabla_z^2 \phi_0}{\phi_0}$  分别等于

$$(\nabla_z L)^2 = 16x_0^2 z^2 / k^4 \sigma_0^2 \sigma^2 \quad (17)$$

$$\frac{1}{k^2} \frac{\nabla_z^2 \phi_0}{\phi_0} = \frac{4x_0^2}{k^2 \sigma^2 \sigma_0^2} - \frac{2}{k^2 \sigma^2} \quad (18)$$

代回(1)式得

$$u_z^2 = 4x_0^2 / k^2 \sigma_0^2 \quad (19)$$

$$u_z = \pm \frac{2x_0}{k\sigma_0^2} \quad (20)$$

$\nabla_z L > 0$  取“+”号,  $\nabla_z L < 0$  取“-”号。需要指出的是, 由于高斯光束是在傍轴慢变振幅近似下得到的近似本征解, 故(20)式的适用范围应是在满足傍轴近似的区域, 这要求  $x_0$  不能远远大于  $\sigma_0$ , 否则由(20)式给出的夹角就会趋向无穷大, 而这显然是偏离了实际情况。

注意到  $u_z$  不含变数  $x, z$ , 沿同一衍射光线的任何点都取相同的数值, 满足了上述要求, 从而检验了  $W_R$ 。同时引用上述计算结果, 可给出黎曼流线束如图 2。

由图看出, 高斯光束在黎曼空间有一个虚焦点, 虚焦距为  $k\sigma_0^2/2$ , 之所以称为虚焦距, 是因为腰面波面曲率半径为  $\infty$ , 从几何光学看, 好象是平行光束通过一个焦距为  $k\sigma_0^2/2$  的负透镜形成一个虚焦点  $F$ 。此外, 如高斯光束波面有微小畸变, 则黎曼流线的延长线不再聚于一点, 就如同存在象差时的几何光线追迹一样。另外, 若不是高斯光束, 而是两束或多束干涉光束, 则会出现两个或多个虚焦点。因此, 利用黎曼三维流形, 可以实现衍射、干涉光束传输描述的几何光学化, 而同时又不舍弃衍射、干涉等波动信息。

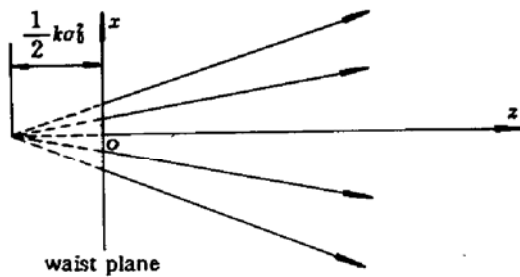


Fig. 2 Rectilinear property of Riemannian optical light

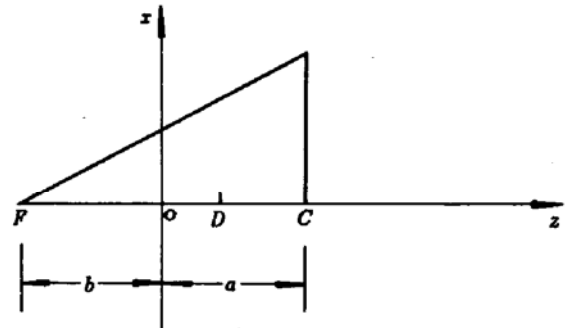


Fig. 3 The coordinates of complex space

另一方面, 我们还可以构造一个具有复数坐标轴的复空间来连结黎曼空间和普通空间。复空间的构造如下: 取普通三维空间的  $z$  轴作为光束传输轴, 束腰平面(或平均腰面)垂直于  $z$  轴, 坐标原点位于腰面上。  $z > 0$  的  $z$  轴为实数坐标轴,  $z < 0$  的另一半为虚数坐标轴, 见图 3。

$z$  轴上的任一线段  $\overline{FC}$  用复数  $a + bi$  表示, 线段长度定义为

$$|\overline{FC}| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (21)$$

线段  $\overline{DC}$  的长度等于

$$|\overline{DC}| = |\overline{FC}| - |\overline{FD}| \quad (22)$$

线段  $\overline{FC}$  的倒数等于

$$\frac{1}{\overline{FC}} = (a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (23)$$

这样,在整个  $z$  轴为实轴的实空间中黎曼流形直线束在复空间( $z$  轴的一半为虚轴)中就转换为普通空间的衍射光线束。黎曼光束的虚焦距  $f_R$  与黎曼流形曲率有关,等于

$$f_R = 2/\sqrt{R_0} \quad (24)$$

$R_0$  是腰面上的黎曼流形曲率。在应用上,若光束波面不是理想球面,即存在象差,则腰面上流形曲率不会处处相等。对于轴对称象差,  $f_R$  应取平均值; 对于象散一类的非轴对称象差, 应分别求出子午面和弧矢面的流形曲率  $R_{0y}$  和  $R_{0x}$ 。现举两例作为演示:

(1) 两个无限束宽匀幅平面波相交形成的杨氏干涉光束

$$\phi_0 = A \cos \theta \cos(kz \sin \theta) \quad (25)$$

$$L = kz \cos \theta \quad (26)$$

式中,  $A$  为振幅常数,  $\theta$  为相交两光束的夹角(半角)。

由于  $L$  不含  $x, y$ , 故波面均为垂直于  $z$  轴的平面。这样

$$\nabla_x L = \nabla_y L = 0 \quad (27)$$

$$\frac{1}{k^2} \frac{\nabla_x^2 \phi_0}{\phi_0} = -\sin^2 \theta, \quad \frac{1}{k^2} \frac{\nabla_y^2 \phi_0}{\phi_0} = 0 \quad (28)$$

$$R_{0x} = R_{0y} = 0 \quad (29)$$

代入  $u_x, W_R$  式, 并引用傍轴条件

$$u_x = \pm \sin \theta \cong \pm \theta \quad (30)$$

$$f_{R_x} = f_{R_y} = \infty \quad (31)$$

又因

$$\phi_0 \nabla_x \phi_0 = -\frac{Ak}{2} \sin 2\theta \sin(kz \sin \theta) \quad (32)$$

这就形成两束分别与  $z$  轴夹角为  $\pm \theta$  的黎曼平行线束, 各自有一个轴外虚焦点, 虚焦距为  $\infty$ 。其实这就是相交前的两匀幅平面波束。正因为束宽为  $\infty$ , 无衍射, 故曲率  $R$  处处为零。由此可见, 纯粹的干涉光束是不会引起黎曼空间弯曲的。

(2) 一维高斯光束

为方便起见, 选择高斯光束的一条黎曼流线  $\overline{FCB}$ , 它在腰面的截距为  $x_0 = \sigma_0$ , 在实、虚两个空间, 以下线段之比分别等于

$$\frac{(\overline{AB})_r}{(\overline{AB})_i} = \frac{\overline{OC} \frac{\overline{FA}}{\overline{FO}}}{\overline{OC} \frac{\overline{FA}}{\overline{FO}}} = \sigma_0 \frac{z + k\sigma_0^2/2}{k\sigma_0^2/2} = \frac{k\sigma_0^2 + 2z}{k\sigma_0} \quad (33)$$

$$\frac{(\overline{AB})_r}{(\overline{AB})_i} = \frac{\overline{OC} \frac{\overline{FA}}{\overline{FO}}}{\overline{OC} \frac{\overline{FA}}{\overline{FO}}} = \sigma_0 \frac{|z + k\sigma_0^2 i/2|}{|k\sigma_0^2 i/2|} = \frac{\sqrt{k\sigma_0^2 + 4z^2}}{k\sigma_0} = \sigma \quad (34)$$

$(\overline{AB})_i$  正好等于穿过  $C$  点的衍射光线在  $z = z$  截面上的横截距。而且  $\overline{OC}$  的选择是任意的。所以, 转换到复空间, 就可得到整个衍射光线束。

由此可见, 由复空间连结的两个空间线束的变换是很直观的。但不要忘记, 只有在傍轴条件下, 同时在实部空间内黎曼光线不出现交叉——即没有干涉的纯衍射情况下, 才会得到如此简明的结果。可以证明<sup>①</sup>, 满足这些条件的衍射光线迹都是二次曲线, 同时考虑到在远场区衍射光线与黎曼光线必须重合, 故这里的二次曲线又必须具有渐进线, 即衍射光线迹是双曲线。

① 证明将在另一文章专门讨论

### 3 在复空间中光束传输的若干定理和公式

本节是要找出以往几何光学、矩阵光学一些定理和公式在复空间的表达形式以及它们与衍射波动行为是如何联系的。为了讨论简便，仍采用一维( $z$ ) 傍轴光束。

(1) 高斯光束的轴上线段与  $ABCD$  定律的复参数  $q$  的关系：

引用图 4，我们将导出复空间的线段  $\overline{FA}$  就是复参数  $q$ 。由 Kogelnik<sup>[7]</sup> 的  $ABCD$  定律得

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R'} - i \frac{2}{k\sigma^2} \quad (35)$$

$R'$  是高斯光束波面曲率半径， $\sigma$  是光束半径。另一面， $1/\overline{FA}$  等于

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{FA}} &= \frac{1}{z + i(k\sigma_0^2/2)} = \frac{z}{z^2 + k^2\sigma_0^4/4} - i \frac{k\sigma_0^2/2}{z^2 + k^2\sigma_0^4/4} \\ &= \frac{4z}{k^2\sigma_0^2\sigma^2} - i \frac{2k\sigma_0^2}{k^2\sigma_0^2\sigma^2} = \frac{1}{R'} - i \frac{2}{k\sigma^2} \end{aligned} \quad (36)$$

所以 
$$\frac{1}{\overline{FA}} = \frac{1}{q}, \quad \overline{FA} = q \quad (37)$$

这样，就可对  $q$  给予更清晰的物理意义， $q$  是在复空间中虚焦点至  $z$  点的距离，与几何光学的物距对应。

(2) 薄透镜公式：

几何光学薄透镜公式可表示为

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (38)$$

$s, s'$  分别代表物距和象距， $f$  是透镜焦距。

与此对应，复空间的薄透镜公式可写成

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{f} \quad (39)$$

$l, l'$  分别代表复数物距和复数象距。 $ABCD$  定律已证明

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{f} \quad (40)$$

用  $l, l'$  取代  $q, q'$  就可推广到非高斯型，且满足前节所列举的条件的傍轴光束，只要给出光束的黎曼流形曲率，就知道  $l$  的虚部，从而求出复象距  $l'$ ，也就得到经过透镜成象后光腰面和虚焦点的位置。

(3)  $ABCD$  定律：

上述已表明，虚实空间的转换要比以往参数  $q$  更几何光学化、更直观，而高斯光束的  $ABCD$  定律只是现在的一个特例。 $ABCD$  定律

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (41)$$

则可推广至满足前节条件的傍轴光束，即

$$l_2 = \frac{Al_1 + B}{Cl_1 + D} \quad (42)$$

只需给定起始的黎曼曲率，就可应用上式计算。

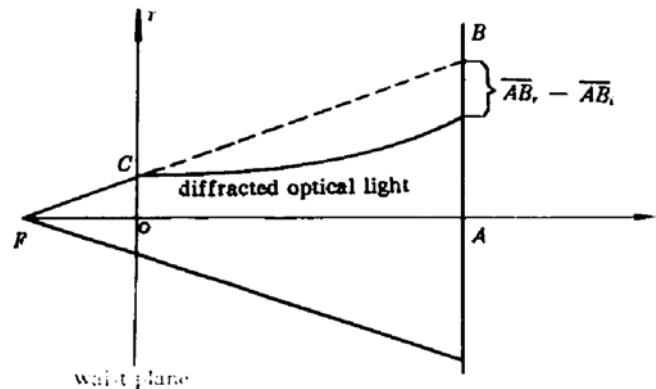


Fig. 4 Transform relation between Riemannian optical light and diffracted optical light

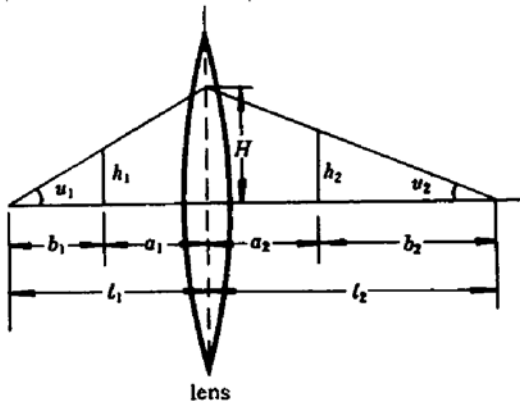


Fig. 5 The Lagrange invariance

(4) 几何光学的 Lagrange 不变量<sup>[9]</sup>:

这个不变量具有以下形式

$$n_1 h_1 u_1 = n_2 h_2 u_2 = \dots = n_m h_m u_m \quad (43)$$

在一个共轴复杂光学系统中存在若干个物、象面,  $h$  分别代表各个物、象的高度,  $u$  分别代表与各物、象对应的傍轴光线的角度,  $n$  分别代表各物、象处的介质光折射率(见图 5, 只给出一个透镜)

在我们讨论的范围内,  $n \approx 1$ , 故有

$$h_1 u_1 = h_2 u_2 = \dots = h_m u_m \quad (44)$$

在复空间中, 若  $h$  代表角度为  $u$  的黎曼流线在虚

实界面(腰面)的横截距, 则上述形式的 Lagrange 不变量仍应成立。图中的各个量分别等于

$$l_1 = a_1 + ib_1, \quad l_2 = a_2 + ib_2 \quad (45)$$

$$u_1 = \frac{H}{|l_1|}, \quad u_2 = \frac{H}{|l_2|} \quad (46)$$

而

$$\frac{H}{|l_1|} = \frac{h_1}{|b_1|}, \quad \frac{H}{|l_2|} = \frac{h_2}{|b_2|} \quad (47)$$

若

$$\frac{h_1^2}{|b_1|} = \frac{h_2^2}{|b_2|} \quad (48)$$

即可得到

$$h_1 u_1 = h_2 u_2 \quad (49)$$

用一维高斯光束进行检验。取  $H = \sigma$ , 则有  $h_1 = \sigma_{01}$ ,  $h_2 = \sigma_{02}$ ,  $\sigma_{01}$ ,  $\sigma_{02}$  分别为光腰半径

$$|b_1| = \frac{1}{2} k \sigma_{01}^2, \quad |b_2| = \frac{1}{2} k \sigma_{02}^2 \quad (50)$$

$$\frac{h_1^2}{|b_1|} = \frac{h_2^2}{|b_2|} = \frac{2}{k} \quad (51)$$

故有

$$h_1 u_1 = h_2 u_2 \quad (52)$$

$H$  取在傍轴条件下的任何值, 以上结果均成立。

(5) 黎曼光束通过同轴复杂光学系统到达最后第  $m$  个腰面的黎曼流线横截距的计算: 这是应用中经常需要得到的横截距参数。

先给出初始面的  $l_1$  及黎曼流线穿过初始面的横截距  $H_1$ , 则有

$$u_1 = \frac{H_1}{|l_1|}, \quad H_1 u_1 = \frac{H_1^2}{|l_1|} \quad (53)$$

因为

$$\frac{H_1}{|l_1|} = \frac{h_1}{b_1} \quad (54)$$

所以

$$h_1 u_1 = \frac{H_1^2}{|l_1|^2} b_1 \quad (55)$$

同样

$$h_m u_m = \frac{H_m^2}{|l_m|^2} b_m \quad (56)$$

引用 Lagrange 不变量

$$h_1 u_1 = h_m u_m \quad (57)$$

代入  $h_m u_m$  表式, 即可得到  $h_m$ 。同时得到光学系统的放大率

$$M \equiv \frac{h_m}{h_1} = \frac{u_1}{u_m} = \frac{H_m}{H_1} \frac{|l_1|}{|l_m|} \quad (58)$$

## 参 考 文 献

- 1 邓锡铭. 有限束宽光动力学. 杭州: 杭州大学出版社, 1993
- 2 Hong Guo, Ximing Deng. Differential geometrical methods in the study of optical transmission (scalar theory). I. Static transmission case. *J. Opt. Soc. Am.*, 1995, A12(3): 600~606
- 3 Hong Guo, Ximing Deng. Differential geometrical methods in the study of optical transmission (scalar theory). I. Time-dependent transmission theory. *J. Opt. Soc. Am.*, 1995, A12(3): 607~610
- 4 郭 弘, 邓锡铭. 费马原理及稳态光束传输的微分几何描述. 中国科学(A辑), 1995, 25(3): 273~279
- 5 郭 弘, 邓锡铭. 非稳态光传输的微分几何描述. 中国科学(A辑), 1995, 25(4): 385~389
- 6 邓锡铭, 郭 弘, 曹 清. 傍轴黎曼几何光学. I. 理论. 中国激光, 1995, A22(7): 523~528
- 7 H. Kogelnik. *BSTJ*, 1965, 44: 455
- 8 M. Born, E. Wolf. *Principles of Optics* (5th ed.) (Pergamon, Oxford, 1975)

## Paraxial Riemannian Geometrical Optics. I. Basic Applications

Deng Ximing Guo Hong Cao Qing

*(National Laboratory on High Power Laser and Physics,**Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)*

**Abstract** In this paper, the differential geometrical method is employed to study the propagation properties of light beams. Starting from the curvature of 3-dimensional Riemannian manifold, a new complex space which can contain the information of both geometrical optics and wave optics is built. Furthermore, some examples, in which the complex space is used to analyse beam propagation, are also given.

**Key words** differential geometry, 3-dimensional Riemannian manifold, HMO, general refractive index, complex space, beam propagation