

# 多通道 F-P 干涉系统及其在三维 折射率场的应用\*

闫大鹏 朱兆清 王振东 贺安之

(南京理工大学应用物理系, 南京 210094)

莫剑英

(华北工学院, 太原 030051)

**提要** 通过计算机模拟设计了一种用于获取三维折射率场多方向干涉图的多通道 F-P 干涉系统, 结果表明, 当利用 Sinc 重建算法来再现三维折射率场时, 六个方向的 F-P 干涉图能达到 2.24% 的平均重建误差。作为一个应用实例, 作者用该系统获得了一个三峰温度场的多方向干涉图, 并重建了其三维折射率分布。

**关键词** 干涉仪, 重建, 层析, 测量

## 1 引言

三维折射率场干涉层析的首要问题是如何获取其多方向干涉投影数据, 然后才能根据重建算法(软件)进行再现。目前已发表的用来获取三维折射率场的多方向干涉投影数据的方法主要有: 旋转扫描法<sup>[1]</sup>、漫射式多方向全息干涉法<sup>[2]</sup>、衍射式多方向全息干涉法<sup>[3]</sup>和多方向像面全息干涉法<sup>[4]</sup>等。旋转扫描法主要是利用干涉仪如马赫-陈德尔干涉仪等通过旋转被测三维折射率场来获取多方向干涉图, 这种方法所获得的多方向干涉图不是同一过程同一时刻, 只能用于可重复的稳态折射率场的研究; 所有的多方向全息干涉法都不是实时的, 需要参考光再现翻拍, 且观察角受干版大小和干版与被测场距离的限制, 难于在实际中应用。

本文利用计算机模拟设计了一种多通道 F-P 干涉系统, 它由单通道等厚条纹型 F-P 干涉仪<sup>[5]</sup>组成, 具有实时、分离式、通光口径任意选择、干涉条纹锐度好等特点, 且能够在 180° 范围内获取三维折射率场的多方向干涉图。计算机模拟结果表明, 当用 Sinc 重建算法来再现三维折射率场时, 用六个通道的 F-P 干涉系统来获取多方向干涉投影数据, 其平均再现精度达 2.24%。作者用这种干涉系统获得了一个三峰温度场的六个方向干涉图, 并重建了其三维折射率分布。

## 2 计算机模拟和实验装置的设计

当光线通过一个三维折射率场  $f(x, y, z) = n(x, y, z) - n_0$  时, 它的光程差表达式为

$$\phi(x, y) = \int_L [n(x, y, z) - n_0] dz \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金和霍英东教育基金会青年教师基金资助项目。

收稿日期: 1993年8月16日; 收到修改稿日期: 1995年2月15日

式中  $z$  为光线的传播方向,  $L$  为光线经过被测场的路程。采用 Radon 变换<sup>[6]</sup>, 变换示意图如图 1 所示, 有

$$\phi(p, \theta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} [n(x, y) - n_0] \delta[p - r \sin(\psi - \theta)] dx dy \quad (2)$$

它的逆变换是

$$n(r, \psi) - n_0 = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi(p, \theta)}{\partial p} \frac{dp}{r \sin(\psi - \theta) - p} \quad (3)$$

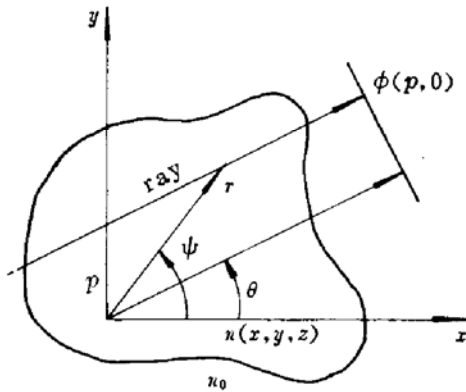


Fig. 1 Sketch map of Radon transform

(3) 式表明, 要计算折射率分布  $n(r, \psi) - n_0$ , 需要在  $[-\pi/2, \pi/2]$  内获取多方向干涉投影数据  $\{\phi(p_i, \theta_j)\}$ 。

作者采用 Sinc 算法, 通过计算机模拟来确定设计一种多方向干涉系统的方向数。

Sinc 重建算法最终可以写成下面的线性方程组<sup>[7]</sup>

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} W_{mn}(p_i, \theta_j) \bar{f}(l_x m, l_y n) = \phi(p_i, \theta_j) \quad (4)$$

式中  $W_{mn}(p_i, \theta_j)$  由下式决定

$$W_{mn}(p_i, \theta_j) = \begin{cases} (1 + \tan^2 \theta_j)^{1/2} l_x \operatorname{sinc} \left[ \frac{p_i \sec \theta_j + l_x m \tan \theta_j - l_y n}{l_y} \right] & \text{当 } 0 \leq |\tan \theta_j| \leq \frac{l_y}{l_x} \\ (1 + \tan^2 \theta_j)^{1/2} \left( \frac{l_y}{|\tan \theta_j|} \right) \operatorname{sinc} \left[ \frac{p_i \sec \theta_j + l_y m \tan \theta_j - l_x n}{l_x \tan \theta_j} \right] & \text{当 } \frac{l_y}{l_x} < |\tan \theta_j| < \infty \\ l_y \operatorname{sinc} \left[ \frac{p_i + m l_x}{l_x} \right] & \text{当 } |\tan \theta_j| = \infty \end{cases} \quad (5)$$

式(5)中,  $l_x, l_y$  分别为  $x, y$  方向的采样间隔。如果被测的三维折射率场的某个截面分成  $M \times N$  个采样点的矩形网格, 并且测得  $M \times N$  个不同光线的投影数据  $\phi(p_i, \theta_j)$ , 就可以根据(4)式建立一个线性方程组, 求解获得  $M \times N$  个未知的系数  $\bar{f}(l_x m, l_y n)$ , 然后代入下式, 即可得到原场的重建分布

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}(l_x m, l_y n) \operatorname{sinc} \left( \frac{x - l_x m}{l_x} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{y - l_y n}{l_y} \right) \quad (6)$$

为了求解系数  $\bar{f}(m l_x, n l_y)$ , 常采用采样点数大于方程的个数的方法, 这样就构成一个超定方程组

$$[A]_{IJ} [f]_J = [\phi]_I \quad (7)$$

式中,  $I = M \times N + K$ ,  $J = M \times N$ ,  $K$  是冗余数据个数, (7) 式超定线性方程组可用内积法<sup>[8]</sup>求其最小二乘解, 但往往会引入较大的舍入误差, 作者采用 Golub 标准 SVD 分解法<sup>[9]</sup>可得到较精确的结果。

在解超定方程组(7)式时, 其系数矩阵  $[A]_{IJ}$  与(5)式的  $W_{mn}(p_i, \theta_j)$  是这样相对应的: 设  $[A]_{IJ}$  的元素是  $a_{kl}$ , 其中  $0 \leq k \leq M \times N + K - 1$ ,  $0 \leq l \leq M \times N - 1$ , 当在一个采样点  $(p_i, \theta_j)$  时, (4) 式的左边对应于  $M \times N$  项之和, 各项的系数分别对应于系数矩阵中某一行的各个

元素；当在不同的采样点时，则对应于矩阵中不同行的诸元素。例如，系数矩阵中的第  $K$  行元素是

$$\begin{aligned} a_{K,0} &= W_{0,0}(p_i, \theta_j), a_{K,1} = W_{0,1}(p_i, \theta_j), \dots, a_{K,K-1} = W_{0,N-1}(p_i, \theta_j) \\ a_{K,N} &= W_{1,0}(p_i, \theta_j), a_{K,N+1} = W_{1,1}(p_i, \theta_j), \dots, a_{K,2N-1} = W_{1,N-1}(p_i, \theta_j), \\ &\dots, a_{K,N \times (M-1)} = W_{M-1,0}(p_i, \theta_j), a_{K,N \times (M-1)+1} = W_{M-1,1}(p_i, \theta_j), \\ &\dots, a_{K,M \times N-1} = W_{M-1,N-1}(p_i, \theta_j) \end{aligned} \quad (8)$$

对于不同的  $K$  值，即对应于不相同的采样点  $\phi(p_i, \theta_j)$ ，这样  $M \times N$  个系数  $f(ml_x, nl_y)$  也就类似地按上述次序存放在一维数组  $f[M \times N]$  中。

作者把上述 sinc 重建算法用 Turbo C. 2.0 编译成实用软件，并首先用来模拟计算投影方向数与重建误差的关系，也即多方向干涉仪的通道数与重建误差的关系，从而确定多通道 F-P 干涉系统的通道数。所选择的模拟折射率场函数为

$$f(x, y) = 2.5 \{1 - \cos[4\pi(x - 0.5)]\} \{1 - \cos[4\pi(y - 0.5)]\} \quad (9)$$

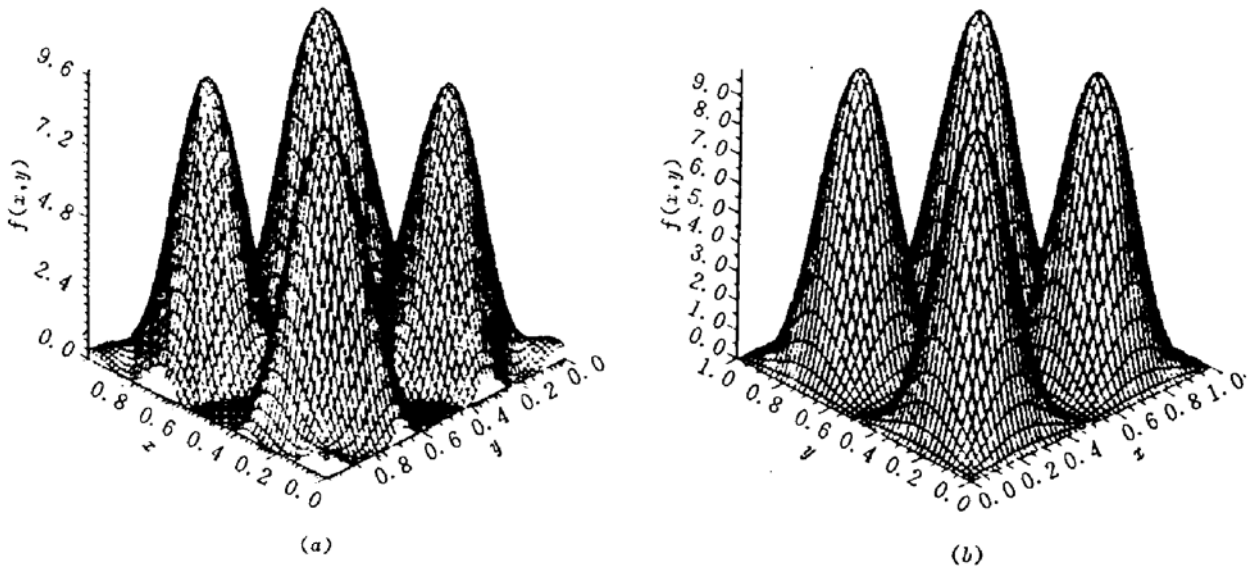


Fig. 2 Reconstructed results by computer simulation  
(a) reconstructed results; (b) three distributions of the original function

重建区域为  $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$ ，取投影方向数为 6 个，即  $\theta = 0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ$ ，观察角范围为  $180^\circ$ ，每个方向的采样数为 16 个，就是说用 96 个数据重建该模拟折射率场，冗余数据量  $K = 36$ ，得到的重建结果如图 2(a) 所示，其中图 2(b) 为原函数的三维分布。当投影方向数改变时，得到的重建精度与投影方向数的关系如图 3 所示。图 3 中的平均误差定义为

$$e_{av} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |e_i| \quad (10)$$

式中  $e_i = (n_{act} - n_{rec}) / \Delta n_{max}$  是重建结果在  $13 \times 13$  网络点上的相对百分误差，其中  $n_{act}$  和  $n_{rec}$  分别代表实际场和重建场， $\Delta n_{max}$  是峰值最大折射率，这里  $\Delta n_{max} = 10$ 。

上述的计算机模拟结果表明，本文编译的 sinc 重建算法，在投影方向数为 6 的情况下，最大误差为  $e_{max} = 8.45\%$ ，最小误差  $e_{min} = 0.02\%$ ，平均误差  $e_{av} = 2.24\%$ ；当投影方向数小于 6

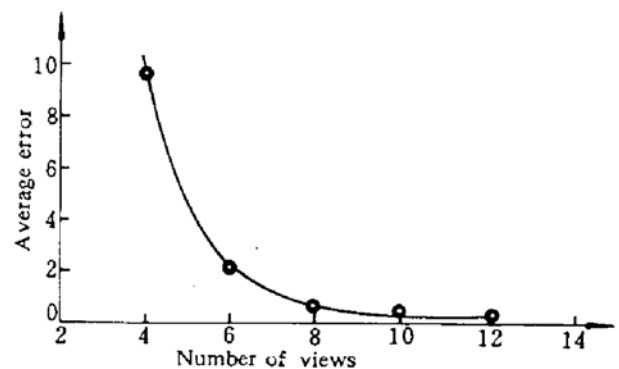


Fig. 3 The relationship between the reconstructed error and the number of views

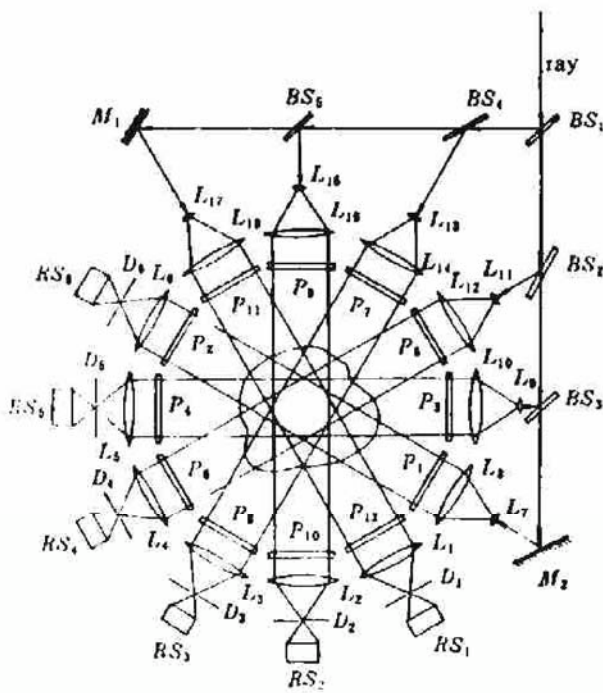


Fig. 4 Optical layout of a multi-path F-P interferometric system

$BS_{1-5}$ : beam splitter;  $M_1, M_2$ : mirror;  
 $RS_{1-6}$ : record system;  $D_{1-6}$ : diaphragm;  
 $L_{1-18}$ : lens;  $P_{1-12}$ : plate mirror

通道干涉测试系统来获取一个具有三峰分布的三维折射率场的多方向干涉图,并由 sinc 重建软件再现了其三维折射率分布。

时,重建误差较大,几乎不能重建;若投影方向数大于6或继续增加,重建精度提高不明显,但实验上实现难度增大。从再现精度和实验上实现的可能性,由上述计算机模拟结果选择6个通道的多方向干涉系统来获取三维折射率场的多方向干涉投影数据是比较合适的。

6个通道的多方向干涉系统如图4所示,它是由单通道等厚条纹型F-P干涉仪<sup>[5]</sup>组成。这种干涉仪具有光路简单、口径大和自差分的特点,可做成分离式长程干涉仪。在图4中,激光束经分光镜分成6个方向的光束,分别由扩束和准直透镜形成平行光并分别通过6个等厚条纹型F-P干涉仪,产生6个方向的干涉图,这些干涉图分别由6个照相系统同步记录,这样就可以在 $180^\circ$ 范围内获取三维折射率场的6个方向干涉图。

### 3 应用实例

作为一个应用实例,作者利用图4所示的多

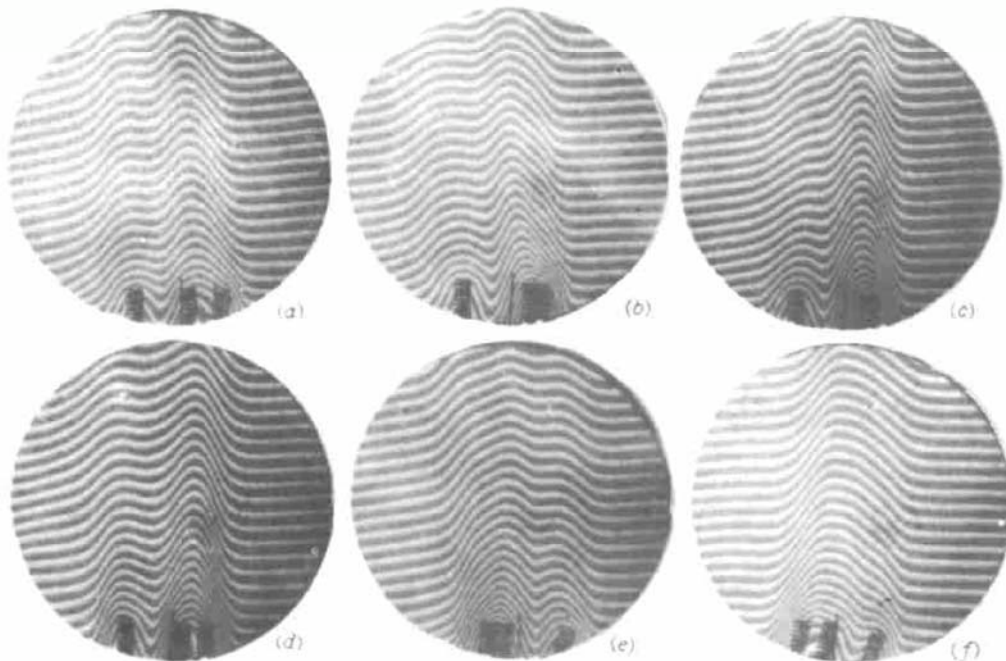


Fig. 5 6 directional interferograms of a three-peak temperature field

(a)  $\theta = 0^\circ$ ; (b)  $\theta = 30^\circ$ ; (c)  $\theta = 60^\circ$ ; (d)  $\theta = 90^\circ$ ; (e)  $\theta = 120^\circ$ ; (f)  $\theta = 150^\circ$

三维折射率场是由三个电热丝加热产生的,三个电热丝分别位于一个等边三角形的顶角,

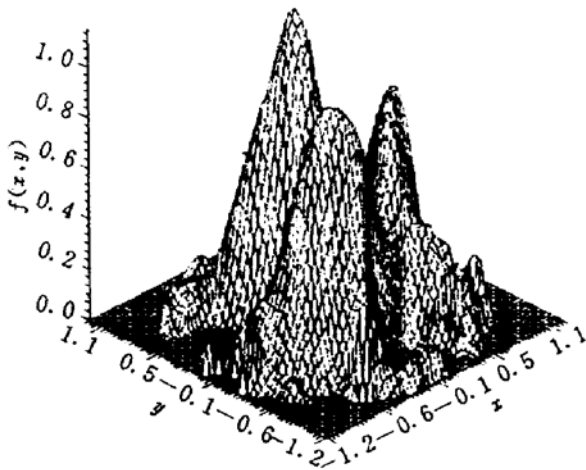


Fig. 6 The distribution of three-dimensional refractive index

相距为 1.3 cm, 该温度场是一个稳定的三维折射率场, 用图 4 所示的实验装置获得其  $180^\circ$  范围内的 6 个方向干涉图如图 5 所示, 这些干涉图由 CCD 摄像机输入到 PC-VISION100 图像处理机中, 由于干涉条纹的快速细化算法和条纹位移量的自动判读算法<sup>[10]</sup>, 获得多方向干涉投影数据后, 通过上述介绍的 sinc 再现算法, 得到三维折射率分布如图 6 所示。图 6 还可通过有关公式转换成三维温度分布。图 6 中没有达到十分光滑的重建结果, 这是由于干涉图中的参考条纹受到不稳定环境的影响, 使参考条纹不平直而引起的。

### 参 考 文 献

- 1 Snyder R. High speed optical tomography for flow visualization. *Appl. Opt.*, 1985, 24(23): 4046~4051
- 2 Matula R. D. Determination of three-dimensional density field from holographic interferogram. *J. Appl. Phys.*, 1971, 42(3): 1109~1112
- 3 Sweeney D. W., Goulard R. Combustion measurement, Hemisphere Publ. Corp., 1976. 262
- 4 He Anzhi, Yan Dapeng. Tomography of 3-D temperature field by laser image holography. *SPIE*, 1989, 1162: 411~418
- 5 He Anzhi, Yan Dapeng, Ni Xiaowu. Large-aperture and long-path interferometer for measuring transient thermal field. *Opt. Eng.*, 1988, 27(10): 841~844
- 6 C. M. Vest. Formation of image from projections: Radon and Abel transforms. *J. O. S. A.*, 1974, 64(9): 1215~1218
- 7 D. W. Sweeney, C. M. Vest. Reconstruction of three-dimensional refractive index field from multidirectional interferometric data. *Appl. Opt.*, 1973, 12(11): 2647~2664
- 8 王仕璠, 贺安之等. 全息干涉度量学-理论与实践. 北京: 科学出版社, 1989. 94~95
- 9 G. H. 格罗布, C. F. 万罗安 著, 廉庆荣等编译. 矩阵计算. 大连: 大连工学院出版社, 1988. 474
- 10 闫大鹏, 朱兆清, 鲁江陵等. 含冲击波流场干涉图的图像处理方法研究. *光学学报*, 1993, 13(5): 439

## A Multi-path F-P Interferometric System and Its Application in Three-dimensional Refractive Index Field

Yan Dapeng Zhu Zhaoqing Wang Zhendong He Anzhi

(Department of Applied Physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

Mo Jianying

(North China Institute of Technology, Taiyuan 030051)

**Abstract** A multi-path F-P interferometric system is designed which is used to obtain the multidirectional interferograms of a three-dimensional refractive index field by the computer simulation. The results show that if the sinc reconstructed algorithm is used to reconstruct the three-dimensional refractive index field, a precision of 2.24 per cent can be reached with 6 F-P interferograms. As an example of application, this system is used to obtain multidirectional interferograms of a three-peak temperature field. The distribution of the three-dimensional refractive index is reconstructed.

**Key words** interferometry, tomography, reconstruction, measurement