

傍轴黎曼几何光学 · I 理论*

邓锡铭 郭 弘 曹 清

(中国科学院上海光机所 高功率激光物理国家实验室, 上海 201800)

提要 利用微分几何方法研究光束传输。从三维黎曼流形的曲率出发, 构造了一个复空间。它的流线能兼容几何光学与波动光学的信息。

关键词 微分几何学, 三维黎曼流形, 光流体模型, 广义光折射率, 复空间, 光束传输

1 引言

邓锡铭等建立了一个光流体模型(简称 HMO)^[1], 用以描写稳态光束的传输。HMO 的流线就是衍射光线, 流体的运动由一个张力张量来描写, 而体张力则来自一个称为赝极化能量的势。HMO 包含两类运动, 分别称为轨道运动与内禀运动。

最近, 郭弘等^[2~5]从费马原理出发, 应用微分几何方法, 建立了三维黎曼流形, 给出了能够描写光束传输的几何量; 并推广了 HMO 的广义光折射率概念, 将几何光学和波动光学行为统一地纳入三维黎曼流形之中。这样, 在自由空间衍射传输的光束, 就可以用黎曼空间中的直线束来描写。

本文目的, 是要利用以上两方面的结果, 在普通三维空间中引入复数坐标, 构造一个复空间, 来连结黎曼空间和普通空间, 使包含衍射、干涉在内的光束传输的描写变得非常简明和几何光学化。文中还列举了应用复数空间描述光束传输的一些定理、公式和例子, 以显示其实用价值和潜力。

2 光流体的微分几何方法概述

首先以费马原理为基础推出稳态光与介质体系的几何因子。Fermat 原理系指在一切可能路径中光走使光程最短的路径, 其数学描述是

$$\delta \int n dl = 0 \quad (1)$$

其中 n 是介质折射率, $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ 是线元。现在我们假设: $n dl$ 即是描述光-介质相互作用系统的几何结构不变元, 即

$$ds^2 = n^2 dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

其中 ds 是不变元, g_{ij} 为度规系数, 是一空间的正函数, 显然它满足

* 国家高技术 863-416 资助课题。

收稿日期: 1995 年 4 月 28 日

$$g_{ij} = n^2 \delta^i_j \quad (3)$$

其中 δ^i_j 为 Kronecker 符号。这样光程线将满足测地线方程,即

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (4)$$

其中 Γ^i_{jk} 为联络系数,由 g_{ij} 完全确定。同时我们还可以求出流形的曲率张量 R^i_{jkl} 及总曲率 R ,用以描述光线的弯曲程度。上述程序原则上已完全决定了光线在介质中的行为,但实际计算却十分困难,为此我们引入 Cartan 标架方法来求解测地线方程及曲率。

我们可推知

$$ds^2 = n^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 \quad (5)$$

$$\text{其中} \quad e^1 = ndx, \quad e^2 = ndy, \quad e^3 = ndz \quad (6)$$

在外积空间中,我们有 Cartan 结构方程唯一决定了曲率张量及测地方程

$$\left. \begin{aligned} de^a + \omega^a_b \wedge e^b &= 0 \\ d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b &= -\frac{1}{2} R^a_b \end{aligned} \right\} \quad (\text{Cartan's Structure Equation}) \quad (7)$$

$$de^a + \omega^a_b e^b = 0, \quad (\text{Geodesic Equation}) \quad (8)$$

其中 $a, b = 1, 2, 3, d$ 分别表示外微分和普通微分。可推出

$$\left. \begin{aligned} \omega^1_2 &= -\omega^2_1 = n^{-1}(n_y dx - n_x dy), \\ \omega^1_3 &= -\omega^3_1 = n^{-1}(n_z dx - n_x dz), \\ \omega^2_3 &= -\omega^3_2 = n^{-1}(n_z dy - n_y dz), \\ \omega^a_b &= 0. \quad (\text{others}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\text{由于} \quad R^a_b = R^a_{bcd} e^c \wedge e^d, \quad (a, b, c, d = 1, 2, 3) \quad (10)$$

故可解出

$$\left. \begin{aligned} R^1_{212} &= n^{-3}(n_{xx} + n_{yy}) - n^{-4}(n_x^2 + n_y^2 - n_z^2) \\ R^1_{313} &= n^{-3}(n_{xx} + n_{zz}) - n^{-4}(n_x^2 + n_z^2 - n_y^2) \\ R^2_{323} &= n^{-3}(n_{yy} + n_{zz}) - n^{-4}(n_y^2 + n_z^2 - n_x^2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

从而算出总曲率标量

$$R = R_{abab} = \frac{4}{n^3} \left[\nabla^2 n - \frac{1}{2n} (\nabla n)^2 \right] \quad (12)$$

它可描述光线在不同位置的弯曲程度。由此可以算出测地线方程的形式,其中考虑到

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{n} \frac{d}{dl}, \quad \frac{d^2}{ds^2} = \frac{1}{n^2} \frac{d^2}{dl^2} - \frac{1}{n^3} \frac{dn}{dl} \frac{d}{dl} \quad (13)$$

$$\text{以及} \quad dn = \nabla n \cdot dx \quad (14)$$

于是我们可以推出测地线方程与程函方程完全一致,即

$$\frac{d}{dl} \left(n \frac{dx}{dl} \right) = \nabla n \quad (15)$$

以往的几何光学以上式为基础便可讨论纯粹几何光线的传输问题。

对于含波动的情况,我们知道,在真空中稳态传输的光波满足 Helmholtz 方程(标量电磁场)

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (16)$$

其中 $\phi(x)$ 为一标量电磁场, k 为真空波矢。由于在真空中没有光与介质的作用,故我们可暂时

认为光线是直线(此时不计及衍射造成的偏折和发散)。并作如下约定

$$\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right), \text{ 和 } dx^i = (dx^1, dx^2, dx^3) \quad (17)$$

同时可知

$$g = \det(g_{ij}) = n^6, \quad g_{ij} = n^{-2} \delta^i_j \quad (18)$$

在上式决定的几何中,场方程应变为(所有偏导数均变为协变导数)

$$\nabla_i \nabla^i \phi + k^2 \phi = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (19)$$

其中

$$\nabla_i \nabla^i \phi = \frac{1}{g^{1/2}} \partial_i (g^{1/2} g^{ij} \partial_j \phi) \quad (20)$$

于是

$$\nabla^2 \phi + n^2 k^2 \phi + \nabla \log n \cdot \nabla \phi = 0 \quad (21)$$

当 $n = \text{常数}$ 时,易知上式即变为均匀折射率情形下的 Helmholtz 方程。

由此我们容易得到场的守恒流方程

$$\nabla_k j^k = 0 \quad (22)$$

其中

$$j^k = \phi^* \nabla^k \phi - \phi \nabla^k \phi^*, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (23)$$

不妨令

$$\phi = \phi_0(x) \exp [ikL(x)] \quad (24)$$

其中 $\phi_0(x)$ 为一实函数并显然有 ϕ_0^2 即为场的能量密度, $L(x)$ 为程函(确切地说,我们称之为准程函),易得

$$j^k = 2ik\phi_0^2 \nabla^k L \quad (25)$$

取其有意义的部分,令

$$j^k = \phi_0^2 \nabla^k L = \frac{\phi_0^2}{n^2} \partial_k L \quad (26)$$

于是守恒流的矢量形式为

$$j = \frac{\phi_0^2}{n^2} \nabla L \quad (27)$$

并可得

$$\nabla_k L \nabla^k L = 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\nabla_k \nabla^k \phi_0}{\phi_0} \quad (28)$$

亦即

$$(\nabla L)^2 = n^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0} + \frac{1}{k^2} \nabla \log n \cdot \nabla \log \phi_0 \quad (29)$$

在通常的波动光学中,上式表示为

$$(\nabla L)^2 = n^2 \quad (30)$$

于是可由此得到程函方程,但这显然是略去了波动的影响,作了如下的几何近似

$$\frac{1}{k^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0} + \frac{1}{k^2} \nabla \log n \cdot \nabla \log \phi_0 = O(\lambda^2) \rightarrow 0 \quad (31)$$

为了计及波动影响,我们令

$$n_g^2 = (\nabla L)^2 \quad (32)$$

$$= n^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0} + \frac{1}{k^2} \nabla \log n \cdot \nabla \log \phi_0 \quad (33)$$

并称 n_g 为广义光折射率,这样以 n_g 代入程函方程中则原则上可以把波动带来的影响定量求解出来。文献[1]中所引入的光流体模型,亦在于将描写光的几何传输行为及波动行为作为合而为一地以有着波幅流动的流体来描述,该流体即具有本节所给出的流体密度 ϕ_0^2 及速度 V 。本节亦是以相似的方法,将几何和波动行为统一地以一个几何因子——广义折射率来描写,从而可以用纯几何方法研究光的物理性质。

3 光流体模型

自由空间电磁场的标量 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (34)$$

的解可表示为

$$\phi = \phi_0 \exp(ikL)$$

振幅 ϕ_0 和准程函 L 都是三维空间坐标的实函数。 ϕ_0 与 L 满足以下关系式

$$(\nabla L)^2 = 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0}, \quad \phi_0^2 = \phi_0^2 (\nabla L)^2 + \frac{1}{k^2} (\nabla \phi_0)^2 - \frac{1}{2k^2} \nabla^2 \phi_0^2 \quad (35)$$

上式右边第一项称为轨道能量密度,第二项称为内禀能量密度,第三项称为腰极化能量密度(2倍)。并且满足连续性方程

$$\nabla \cdot [\phi_0^2 \nabla L] = 0 \quad (36)$$

分别定义 ∇L 为流体的速度,其中 $c = 1$ 是真空光速; ϕ_0^2 为流体密度。流体内的张力张量 $\vec{\Phi}$ 等于

$$\vec{\Phi} = \phi_0^2 (-\nabla \varphi) \quad (37)$$

速度势 φ 等于

$$\varphi = -\frac{1}{2k^2} \left(\frac{\nabla \phi_0}{\phi_0} \right) \quad (38)$$

已经证明,在流体内部张力作用下,流体的流线与光束的衍射光线处处重合。流体内部的体张力又可表示为

$$T_0 = \nabla \cdot \vec{\Phi}_0 \quad (39)$$

或写成以下两种形式

$$T_0 = \phi_0^2 (-\nabla \varphi_0) \quad (40)$$

其中

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0}$$

另一形式

$$T_0 = -\nabla (W_r + W_i) \quad (41)$$

其中

$$W_r = -\frac{1}{4k^2} \nabla^2 \phi_0^2, \quad W_i = \frac{1}{k^2} (\nabla \phi_0)^2 \quad (42)$$

W_r 称为腰极化能量密度(标量场), W_i 称为内禀能量密度。此外,在傍轴条件下,从第 2 节(12)式可得到三维黎曼流形曲率 R 与 T_0 的关系

$$T_0 = -\nabla \frac{\sqrt{R}}{4k} \quad (43)$$

此外,已经证明,在任一傍轴光束的垂直于传输轴的横截面上,径向轨道能量与径向内禀能量之和为一不变量,即

$$\int \phi_0^2 (\nabla_{\perp} L)^2 ds + \int \frac{1}{k^2} (\nabla_{\perp} \phi_0)^2 ds$$

的积分之和不含有传输轴坐标 z ,即它与截面的选择无关。积分沿整个截面进行,其中符号 $\nabla_{\perp} = i(\partial/\partial x) + j(\partial/\partial y)$ 。更详细的描述可参阅文献[1]。

4 三维黎曼流形的指向

为了将三维黎曼流形的曲率 R 应用于实际问题的分析,需引用自由空间光束在黎曼空间传输的直线性以及黎曼空间弯曲的激发能量,构造一个复数坐标空间,用以连接黎曼空间和普通空间,从而获得两个空间相互转换的一个直观图像。本节先讨论如何从光束参数确定黎曼流

形的指向。

考虑在自由空间以 z 轴为传输轴的任一单色、线偏振傍轴光束, 由于它在远场区域的 $(1/k^2)(\nabla^2\phi_0/\phi_0)$ 项趋于零, 两个空间的流线和衍射光线处处重合并且都是直线。当离开远场区, $(1/k^2)(\nabla^2\phi_0/\phi_0)$ 一般不再等于零, 这样, 在普通空间的衍射光线就与黎曼空间三维流形的直线束分离。这种分离可分解为两部分, (a) 衍射光线的切线(沿波矢 \mathbf{k} 方向) 与同一点的黎曼流线不再重合; (b) 衍射光线迹偏离黎曼流线的直线迹。显然, 两部分偏离均起因于黎曼空间的弯曲。这种弯曲应与空间激发能量相对应, 激发能量密度用 W_R 表示。

为推导简便, 考虑一维傍轴光束(只含 x, z 变数), 在远场区, 两类线迹与 z 轴的夹角均为

$$\phi_0^2(\nabla_z L)^2 + \frac{1}{k^2}\phi_0\nabla_z^2\phi_0$$

其中

$$\nabla_z = \partial/\partial x$$

而在黎曼空间, 径向能量密度还应包含 W_R 的径向分量 W_{Rz} , 即

$$\left[\phi_0^2(\nabla_z L)^2 + \frac{1}{k^2}\phi_0\nabla_z^2\phi_0\right] - W_{Rz}$$

设黎曼流线与 z 轴的夹角为 u_z , 根据傍轴条件及三维黎曼流形的直线性, 则有

$$\phi_0^2 u_z^2 = \left| \left[\phi_0^2 (\nabla_z L)^2 + \frac{1}{k^2} \phi_0 \nabla_z^2 \phi_0 \right] - W_{Rz} \right| \quad (44)$$

即

$$u_z^2 = \left| \left[(\nabla_z L)^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\nabla_z^2 \phi_0}{\phi_0} \right] - \frac{W_{Rz}}{\phi_0^2} \right| \quad (45)$$

u_z 就是三维黎曼流形的指向角。

同时, 由于空间弯曲, 黎曼空间一条直的流线在普通空间就转换成一条弯的衍射光线。但是, 在同一条衍射光线上的任何点都应具有相同的 u_z 值, 并都应等于该衍射光线在远场区的波矢 \mathbf{k} 与 z 轴的夹角(见图 1)。满足这个条件的 W_{Rz} 应取以下数值

$$W_{Rz} = \frac{\sqrt{R_z}}{2k} \phi_0^2 \quad (46)$$

或

$$\frac{W_{Rz}}{\phi_0^2} = \frac{\sqrt{R_z}}{2k} \quad (47)$$

R_z 是第 2 节导出的三维黎曼流形的曲率的 x 分量。式子右边含 $k^{-1} = (2\pi)^{-1}\lambda$ 表明, 同样的空间曲率, 光波长越长空间弯曲激发能量越大, 波长越短, 则越小。

对于傍轴光束, R 及广义光折射率 n_G 近似等于

$$R \cong 4\nabla^2 n_G, \quad n_G \cong 1 + \frac{1}{2k^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\phi_0} \quad (48)$$

此外

$$R_z \cong 4\nabla_z^2 n_G, \quad W_{Rz} \cong \frac{\sqrt{R_z}}{2k} \phi_0 \quad (49)$$

$$R_y \cong 4\nabla_y^2 n_G, \quad W_{Ry} \cong \frac{\sqrt{R_y}}{2k} \phi_0 \quad (50)$$

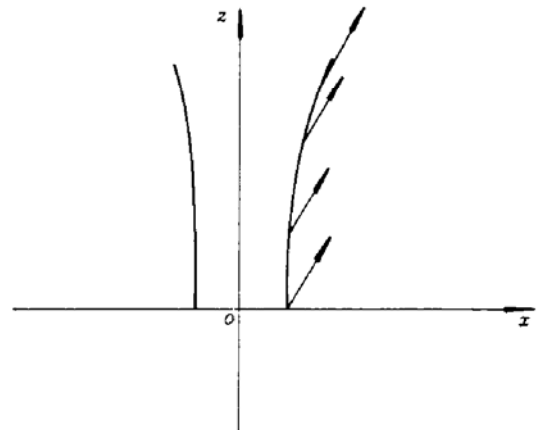


Fig. 1 The directions of the 3-D Riemannian Manifold

对于 y 分量, 同样有

$$u_y^2 = \left| \left[(\nabla_y L)^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\nabla_y^2 \phi_0}{\phi_0} \right] - \frac{W_{Ry}}{\phi_0^2} \right| \quad (51)$$

在本文的第二部分, 将详细给出如何建立与这节结论等效的复数空间并举一维高斯光束等为例, 以检验 W_R 和本文的理论框架的正确性和适用性。

参 考 文 献

- 1 邓锡铭. 有限束宽光动力学. 杭州: 杭州大学出版社, 1993. 3
- 2 Hong Guo, Ximing Deng. Differential geometrical methods in the study of optical transmission (scalar theory). I. static transmission case. *J. Opt. Soc. Am.*, 1995, **A12**(3):600~606
- 3 Hong Guo, Ximing Deng. Differential geometrical methods in the study of optical transmission (scalar theory). II. time-dependent transmission theory. *J. Opt. Soc. Am.*, 1995, **A12**(3):607~610
- 4 郭 弘, 邓锡铭. 费马原理及稳态光束传输的微分几何描述. *中国科学 (A 辑)*, 1995, **25**(3):273~279
- 5 郭 弘, 邓锡铭. 非稳态光传输的微分几何描述. *中国科学 (A 辑)*, 1995, **25**(3):280

Paraxial Riemannian Geometrical Optics I. Theory

Deng Ximing Guo Hong Cao Qing

(National Laboratory on High Power Laser and Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

Abstract In this paper, a differential geometrical method is employed to study the propagation properties of light beams. Starting from the curvature of 3-dimensional Riemannian manifold, a new complex space which can contain the information of both geometrical optics and wave optics is built.

Key words differential geometry, 3-dimensional Riemannian manifold, HMO, general refractive index, complex space, beam propagation