

自由电子激光大信号增益公式的研究

赵东焕

(中国科学院上海光机所, 上海 201800)

摘要 利用自由电子激光中电子与辐射波多次相互作用原理, 获得了大信号情况下自由电子激光增益表达式。结果表明, 大信号增益公式可圆满地解释自由电子激光器实验中激光输出饱和现象。

关键词 大信号自由电子激光增益, 电子与波的多次相互作用, 相干辐射

1 引言

激光增益参量是衡量激光器性能的一个重要物理量, 就自由电子激光这门新兴学科, 自第一台激光器诞生以来^[1], 就有不少学者对它进行了研究^[2~6], 其中柯尔森(Colson)教授于 1978 年发表的增益公式^[6]

$$G(t) = \mathcal{A} \left(1 - \cos \Delta \omega t - \frac{1}{2} \Delta \omega t \sin \Delta \omega t \right) \quad (1)$$

是一个较有实用意义的公式。由于这个公式不仅能较好地说明自由电子激光相干辐射, 而且计算也十分方便。但是, 人们逐渐发现(1)式与实际自由电子激光实验中激光输出饱和物理现象相悖。因为(1)式表明增益 G 的局部正峰值始终是随 $\Delta \omega t$ 的增大而增加, 但事实上自由电子激光实验表明电子的相干辐射时间是有限的, 电子与波的相互作用结果并不总是使辐射能量增加, 而是达到一定程度后下降。由于(1)式与自由电子激光器小信号的输出相符, 所以人们通常称(1)式为自由电子激光小信号增益公式, 致于大信号情况下的增益研究, 至今还未得出与实验相符的结果。

作者研究后认为(1)式之所以不能很好地反映大信号情况下自由电子激光输出饱和现象, 其原因在于(1)式的解析过程中忽略了高阶辐射波与电子相互作用的影响。本文考虑了激光器中电子与辐射波的多次相互作用情况下, 导出了自由电子激光增益表达式, 其结果不仅能较好地反映出小信号情况下的相干辐射, 而且在大信号情况下也能较好地解释实验中激光输出饱和现象。

2 基本关系式

为便于大信号情况下增益公式的推导, 首先对电子与波的相互作用全过程说明如下: 其相互作用全过程大致可分为三个阶段: 电子在 Wiggler 磁场作用下产生自发辐射, 与此同时电子的运动轨迹发生变化; 自发辐射波与同步电子相互作用, 使电子在纵向群聚形成高密度波的相

干辐射,同时辐射场吸收电子能量;相干辐射波与剩余的同步电子相互作用,使电子再次在纵向群聚,同时电子与辐射场再次进行能量交换,直到所有电子与辐射波不同步为止。电子与辐射场能量交换的结果有可能使场能量增加,也可能使场能量减少,究竟何种形式将取决于同步电子的相位状态^[7]。

相对论电子的运动规律由洛伦兹力方程和能量方程表示

$$\frac{d}{dt}(\gamma\mathbf{v}) = -\frac{|e|\hbar}{m_0}[\mathbf{E}_r + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_r + \mathbf{B}_w)] \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\gamma = -\frac{|e|\hbar}{m_0c^2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_r \quad (3)$$

式中 γ 为相对论能量因子, \mathbf{v} 为相对论电子运动速度, m_0 为电子的静止质量, e 为电子电荷, c 为真空中光速, \mathbf{B}_w 为圆偏振 Wiggler 螺旋磁场, \mathbf{E}_r 和 \mathbf{B}_r 分别为辐射场电场和磁场, 它们分别为

$$\mathbf{B}_w = B_0(\hat{e}_z \cos \xi_0 + \hat{e}_y \sin \xi_0) \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_r = E_r(\hat{e}_z \cos \xi_r - \hat{e}_y \sin \xi_r)$$

$$\mathbf{B}_r = \frac{E_r}{c}(\hat{e}_z \cos \xi_r + \hat{e}_y \sin \xi_r) \quad (5)$$

式中 B_0 为 Wiggler 磁场振幅, E_r 为辐射场电场振幅, $\xi_0 = k_0 z + \varphi_0$, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, $\xi_r = k_r z - \omega_r t + \varphi_r$, $k_r = 2\pi/\lambda_r$, λ_0 和 λ_r 分别为 Wiggler 场周期长度和辐射场波长, φ_0 和 φ_r 分别为它们对应的初相位, ω_r 为辐射场角频率, 由(2)式得电子与波相互作用前的分量方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma v_x) &= \frac{|e|B_0}{m_0}v_z \sin \xi_0 - \frac{|e|E_r}{m_0}\left(1 - \frac{v_z}{c}\right)\cos \xi_r \\ \frac{d}{dt}(\gamma v_y) &= -\frac{|e|B_0}{m_0}v_z \cos \xi_0 + \frac{|e|E_r}{m_0}\left(1 - \frac{v_z}{c}\right)\sin \xi_r \\ \frac{d}{dt}(\gamma v_z) &= -\frac{|e|\hbar}{m_0}\left[v_z\left(B_0 \sin \xi_0 - \frac{E_r}{c}\cos \xi_r\right) - v_y\left(B_0 \cos \xi_0 + \frac{E_r}{c}\sin \xi_r\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由此得相互作用前电子在 Wiggler 磁场作用下横向运动速度分量为

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{2\Omega_r c}{\omega_r} \sin \xi_{rs} - \frac{\Omega_0 c}{\omega_0} \cos \xi_{os} \\ v_y &= \frac{2\Omega_r c}{\omega_r} \cos \xi_{rs} - \frac{\Omega_0 c}{\omega_0} \sin \xi_{os} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\omega_0 = k_0 c$, 其他量分别为

$$\Omega_0 = \frac{|e|B_0}{\gamma_s m_0} \quad \Omega_r = \frac{|e|E_r}{\gamma_s m_0 c} \quad (8)$$

$$\xi_{os} = k_0 z_s + \varphi_0 \quad \xi_{rs} = k_0 z_s - \omega_r t + \varphi_r \quad (9)$$

其中 γ_s 为相互作用前入射相对论电子能量因子, z_s 为相互作用前电子纵向位置。由于同步电子与辐射波多次相互作用,使电子能量和运动轨迹发生多次变化,则相互作用后电子态的能量因子和纵向位置可表示为

$$\gamma = \gamma_s + \delta\gamma = \gamma_s + \sum_0^n \delta\gamma_i \quad (10)$$

$$z = z_s + \delta z = z_s + \sum_1^n \delta z_i \quad (11)$$

式中 $\delta\gamma_i$ 为第 i 次相互作用后电子能量变量,其中 $i=0$ 时 $\delta\gamma_0$ 为受 Wiggler 磁场作用电子自发辐射

后的能量变量。 δz_i 为第 $i-1$ 次相干辐射波与同步电子相互作用后电子纵向群聚位置漂移量, 其中 δz_1 为自发辐射波与同步电子相互作用后电子纵向群聚位置漂移量。把(11)式代入(5)式得相互作用后辐射场电场的近似表达式为

$$E_r \approx E_r \left[\hat{e}_x \left(\cos \xi_{rs} - k_r \sum_1^n \delta z_i \sin \xi_{rs} \right) - \hat{e}_y \left(\sin \xi_{rs} + k_r \sum_1^n \delta z_i \cos \xi_{rs} \right) \right] \quad (12)$$

同理, 利用(7)式可得相互作用后电子速度横向分量为

$$\left. \begin{aligned} v_x &\approx \frac{2\Omega_r c}{\omega_r} \left(\sin \xi_{rs} + k_r \sum_1^n \delta z_i \cos \xi_{rs} \right) - \frac{\Omega_0 c}{\omega_0} \left(\cos \xi_{0s} - k_0 \sum_1^n \delta z_i \sin \xi_{0s} \right) \\ v_y &\approx \frac{2\Omega_r c}{\omega_r} \left(\cos \xi_{rs} - k_r \sum_1^n \delta z_i \sin \xi_{rs} \right) - \frac{\Omega_0 c}{\omega_0} \left(\sin \xi_{0s} - k_0 \sum_1^n \delta z_i \cos \xi_{0s} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

把(10), (12)和(13)式代入(3)式, 并忽略式中 $\delta z_i, \delta z_j$ 项高级小量, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \gamma_0 &= H \cos(\Delta \omega t + \theta) \\ \frac{d}{dt} \delta \gamma_i &= -D \sin(\Delta \omega t + \theta) \delta z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{\Omega_0 \Omega_r \gamma_s}{\omega_0} & D &= \frac{(k_0 + k_r) \Omega_0 \Omega_r \gamma_s}{\omega_0} \\ \Delta \omega &= (k_0 + k_r) v_{zs} - \omega_r & \theta &= (k_0 + k_r) z_s + \varphi_r + \varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中 v_{zs} 为相互作用前电子纵向速度。由于 δz_i 是第 $i-1$ 次相干辐射波与电子相干的结果, 而相干后电子相应的能量变量为 $\delta \gamma_i$, 则我们有 $\delta \gamma_{i-1} \rightarrow \delta z_i$, 符号“ \rightarrow ”表示诱导产生。根据能量因子 γ 的基本定义以及实际激光器中 $v_{\perp} \ll v \approx v_z$ 的关系, 可得下列近似式

$$\delta v_i \approx \frac{c}{\gamma_s^3} \delta \gamma_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

其中 δv_i 为第 i 次相干辐射对应的电子速度变量, 由于 $v \approx v_z$, 则可得

$$\delta z_i \approx \frac{c}{\gamma_s^3} \int \delta \gamma_{i-1} dt \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

式中当 $i=1$ 时, (17)式表示第1次电子群聚纵向位置漂移量与自发辐射时电子能量变量之间关系。由(14)和(17)式可得各级能量变量之间一个递推关系式

$$\frac{d}{dt} \delta \gamma_i = -\frac{cD}{\gamma_s^3} \sin(\Delta \omega t + \theta) \int \delta \gamma_{i-1} dt \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

3 增益及其分析

自由电子激光增益可表示为

$$G(t) = -4\pi m_0 c^2 \rho_e V \langle \delta \gamma \rangle_{\varphi_r} / E_0^2 V \quad (19)$$

式中 ρ_e 为电子束密度, V 为相互作用区体积, $E_0^2 V$ 为辐射场初始能量, $\langle \delta \gamma \rangle_{\varphi_r}$ 为电子能量变量相对于初相位 φ_r 的平均值。由于电子初相位 φ_r 可以在 $0 \sim 2\pi$ 范围内均匀分布, 故有

$$\langle \delta \gamma \rangle_{\varphi_r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_0^n \delta \gamma_i d\varphi_r \quad (20)$$

由(14)和(18)式得

$$\delta\gamma_0 = \frac{H}{\Delta\omega} [\sin(\Delta\omega t + \theta) - \sin\theta] \quad (21)$$

$$\delta\gamma_1 = -\frac{cDH}{\gamma_s^3 \Delta\omega^3} \left\{ 1 - \cos\Delta\omega t + \Delta\omega t \sin\theta \cos(\Delta\omega t + \theta) - \frac{1}{4} [\cos 2\theta - \cos 2(\Delta\omega t + \theta)] \right\} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma_2 = & (-1)^2 \frac{c^2 D^2 H}{\gamma_s^6 \Delta\omega^5} \left\{ \Delta\omega t \cos(\Delta\omega t + \theta) \left(\frac{1}{4} \cos 2\theta - 1 \right) - \frac{1}{2} \Delta\omega t \cos\theta + \frac{1}{4} (\Delta\omega t)^2 \sin\theta \right. \\ & - \frac{1}{2} \Delta\omega t \sin\theta \sin 2(\Delta\omega t + \theta) + 1 \frac{1}{16} [\sin(\Delta\omega t + \theta) - \sin\theta] + \frac{3}{8} [\sin 2(\Delta\omega t + \theta) - \sin 2\theta] \\ & - \frac{1}{8} [\sin(2\Delta\omega t + 3\theta) - \sin^3\theta] - \frac{1}{48} [\sin 3(\Delta\omega t + \theta) - \sin 3\theta] + \frac{1}{4} \cos\theta [\cos 2\theta - \cos 2(\Delta\omega t + \theta)] \\ & \left. - \frac{5}{8} \sin 2\theta [\cos\theta - \cos(\Delta\omega t + \theta)] - \frac{1}{4} \cos 2\theta [\sin(\Delta\omega t + \theta) - \sin\theta] \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma_3 = & (-1)^3 \frac{c^3 D^3 H}{\gamma_s^9 \Delta\omega^7} \left\{ -\frac{1}{12} (\Delta\omega t)^3 \sin\theta \cos(\Delta\omega t + \theta) + \frac{1}{4} (\Delta\omega t)^2 (\cos\Delta\omega t - 1 - \frac{1}{4} \cos 2\theta) \right. \\ & + 1 \frac{11}{16} \Delta\omega t \sin\theta \cos(\Delta\omega t + \theta) - \frac{1}{2} \Delta\omega t \cos\theta \sin(\Delta\omega t + \theta) + \frac{1}{4} \Delta\omega t \sin 2(\Delta\omega t + \theta) + \frac{5}{16} \Delta\omega t \sin 2\theta \\ & - \frac{3}{8} \Delta\omega t \sin 2\theta \cos(\Delta\omega t + \theta) - \frac{1}{24} \Delta\omega t \sin\theta \cos 3(\Delta\omega t + \theta) - \frac{1}{4} \Delta\omega t \sin\theta \cos 2\theta \cos(\Delta\omega t + \theta) \\ & + \frac{5}{8} \Delta\omega t \sin 2\theta \cos\theta \cos(\Delta\omega t + \theta) + \frac{1}{16} \Delta\omega t \cos 2\theta \sin 2(\Delta\omega t + \theta) - \frac{7}{48} \Delta\omega t \sin 3\theta \cos(\Delta\omega t + \theta) \\ & - 1 \frac{13}{16} \sin\theta [\sin(\Delta\omega t + \theta) - \sin\theta] + 1 \frac{1}{16} \cos\theta [\cos\theta - \cos(\Delta\omega t + \theta)] \\ & - \frac{3}{8} \sin 2\theta [\sin(\Delta\omega t + \theta) - \sin\theta] + \frac{3}{16} \cos 2\theta [\cos\theta - \cos(\Delta\omega t + \theta)] \\ & + \frac{5}{32} \sin 2\theta [\sin 2(\Delta\omega t + \theta) - \sin 2\theta] + \frac{1}{18} \sin\theta [\sin 3(\Delta\omega t + \theta) - \sin 3\theta] \\ & + \frac{7}{48} \sin 3\theta [\sin(\Delta\omega t + \theta) - \sin\theta] - \frac{5}{72} \cos 3\theta [\cos\theta - \cos(\Delta\omega t + \theta)] \\ & - \frac{185}{288} [\cos 2\theta - \cos 2(\Delta\omega t + \theta)] - \frac{1}{32} [\cos 2\theta - \cos(\Delta\omega t + 2\theta)] \\ & - \frac{1}{6} [\cos 3\theta - \cos 3(\Delta\omega t + \theta)] + \frac{1}{1152} [\cos 4\theta - \cos 4(\Delta\omega t + \theta)] \\ & \left. + \frac{1}{96} [\cos 4\theta - \cos(3\Delta\omega t + 4\theta)] \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

由于 $\delta\gamma_i$ 变量随 i 增大其系数的数量级迅速变小, 可以预见当 $i \geq 4$ 时, $\delta\gamma_i$ 变量数值量级很小并可完全忽略不计。由(20)式可得

$$\langle \delta\gamma_0 \rangle_{\varphi_r} = \langle \delta\gamma_2 \rangle_{\varphi_r} = 0 \quad (25)$$

$$\langle \delta\gamma_1 \rangle_{\varphi_r} = -\frac{cDH}{\gamma_s^3 \Delta\omega^3} (1 - \cos\Delta\omega t - \frac{1}{2} \Delta\omega t \sin\Delta\omega t) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta\gamma_3 \rangle_{\varphi_r} = & -\frac{c^3 D^3 H}{\gamma_s^9 \Delta\omega^7} \left[1 \frac{23}{64} - 1 \frac{7}{16} \cos\Delta\omega t + \frac{5}{64} \cos 2\Delta\omega t - 1 \frac{5}{16} \Delta\omega t \sin\Delta\omega t \right. \\ & \left. - \frac{1}{32} \Delta\omega t \sin 2\Delta\omega t + \frac{1}{4} (\Delta\omega t)^2 (\cos\Delta\omega t - 1) + \frac{1}{24} (\Delta\omega t)^3 \sin\Delta\omega t \right] \quad (27) \end{aligned}$$

则可得自由电子激光增益为

$$G(t) = G_1(t) + G_2(t) \tag{28}$$

其中

$$G_1(t) = g_1 F_1(t) = \frac{g_0 c D H}{\gamma_s^3 \Delta \omega^3} \left(1 - \cos \Delta \omega t - \frac{1}{2} \Delta \omega t \sin \Delta \omega t \right) \tag{29}$$

$$G_2(t) = g_2 F_2(t) = \frac{g_0 c^3 D^3 H}{\gamma_s^9 \Delta \omega^7} \left[1 \frac{23}{64} - 1 \frac{7}{16} \cos \Delta \omega t + \frac{5}{64} \cos 2 \Delta \omega t - 1 \frac{5}{16} \Delta \omega t \sin \Delta \omega t - \frac{1}{32} \Delta \omega t \sin 2 \Delta \omega t + \frac{1}{4} (\Delta \omega t)^2 (\cos \Delta \omega t - 1) + \frac{1}{24} (\Delta \omega t)^3 \sin \Delta \omega t \right] \tag{30}$$

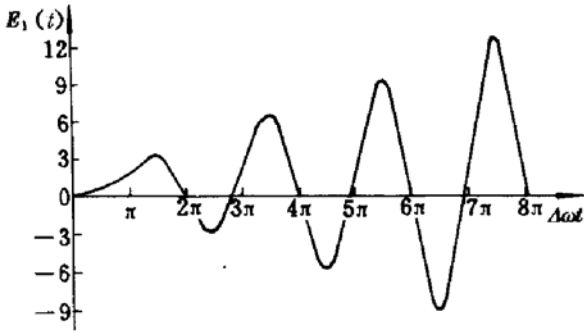


Fig. 1 The curve of $F_1(t)$ vs $\Delta \omega t$

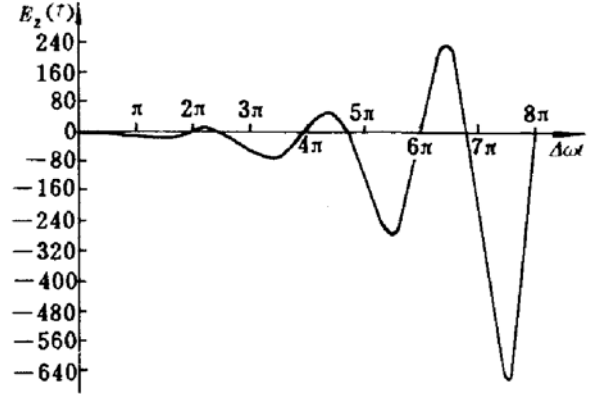


Fig. 2 The curve of $F_2(t)$ vs $\Delta \omega t$

式中 $g_0 = 4\pi m_0 c^2 \rho_e / E_0^2$ 。(28) 式表明大信号自由电子激光增益是由 $G_1(t)$ 和 $G_2(t)$ 两项组成。为研究增益 $G(t)$ 的变化趋势, 将 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 函数对应于 $\Delta \omega t$ 的变化曲线绘于图 1 和图 2, 不难看出 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 是两个基本反向增长函数。在 $0 \sim 2\pi$ 范围内, 两个函数峰值数量级差别很小, 但 $\Delta \omega t \geq 2\pi$ 时, 它们局部峰值量级有较大级差, 且随 $\Delta \omega t$ 的增大, 两者峰值量级级差迅速增大。由于系数 g_1 的数量级一般要比 g_2 大得多, 例如物理参量选择为 $\lambda_0 = 24 \text{ mm}$, $\lambda_r = 8 \text{ mm}$, $\gamma_s = 3$, $B_0 = 0.2 \text{ T}$, $E_r \approx B_0 c / 10$, $\Delta \omega = 10^9$, 则计算可得 $g_2 / g_1 = 0.003734$ 。由此可见在 $0 \sim 2\pi$ 范围内增益 $G(t)$ 特性曲线基本上接近于 $G_1(t)$, 但随

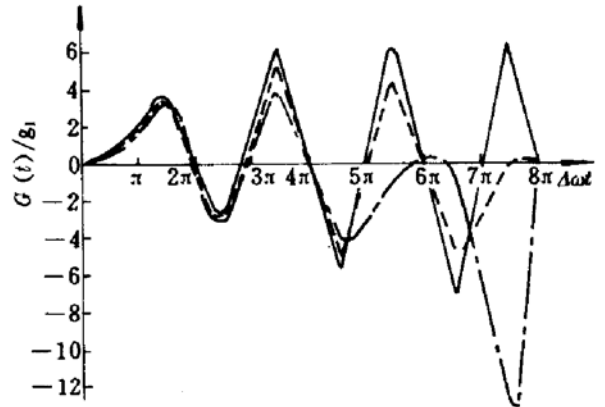


Fig. 3 The characteristic of gain $G(t)$ under the different parameters, where the solid line is for $g_2/g_1 = 0.01$, the dashed line is for $g_2/g_1 = 0.02$, and the dash-dotted line is for $g_2/g_1 = 0.04$

$\Delta \omega t$ 的增大, 由于 $F_2(t)$ 负增长影响迅速增大, $G(t)$ 的局部正峰值将远离 $G_1(t)$ 的局部正峰值, 并随 $\Delta \omega t$ 增大其差距迅速增大(见图 3)。为了说明 $F_2(t)$ 负增长的影响程度, 图 3 给出了不同参量 g_2/g_1 比值情况下三条增益曲线。从此图可看出, 点划线一组增益特性曲线受 $F_2(t)$ 负增长影响最大, 而实线一组增益特性曲线受 $F_2(t)$ 负增长影响最小, 这说明 $F_2(t)$ 负增长对增益曲线的影响随 g_2/g_1 比值加大而增加。但如果它们与图 1 中 $F_1(t)$ 比较, 不难看出增益 G 局部正峰值随 $\Delta \omega t$ 的增大而下降, 并最终都将在某一时刻局部正峰值将完全消失, 这说明激光增益最终将趋于饱和, 实验中与此对应的就是激光输出饱和现象。由于不同参数情况下增益特性曲线受 $F_2(t)$ 负增长影响程度不同, 所以不同参量条件下到达激光输出饱和时刻 t 也是不同的, 这可以从图 3 的三条曲线走势中反应出来。

另一方面, 在 $0 \sim 2\pi$ 范围内, 图 3 中三条曲线均基本接近于 $F_1(t)$ 曲线, 这说明在一般情况

下在小信号范围内, $F_2(t)$ 曲线影响很小并可忽略不计, 这时 $G(t) \approx G_1(t)$ 。但在大信号情况下, 用 $G_1(t)$ 来描述自由电子激光增益是不适合的。

参 考 文 献

- 1 D. A. G. Deacon, L. R. Elias, J. M. J. Madey *et al.*. First operation of a free-electron laser. *Phys. Rev. Lett.*, 1977, **38**:892
- 2 L. R. Elias, W. M. Faiebank, J. M. J. Madey *et al.*. Observation of stimulated emission of radiation by relativistic electrons in a spatially periodic transverse magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 1976, **36**:717
- 3 F. A. Hopf, P. Meystre, M. O. Scully *et al.*. Classical theory of a free-electron laser. *Opt. Commun.*, 1976, **18**:413
- 4 J. M. J. Madey, D. A. G. Deacon. "Free Electron Lasers" in Cooperative Effect in Matter and Radiation. Plenum press N. Y., 1977. 313
- 5 G. Mayer. Collisionless Landau damping and stimulated Compton scattering. *Opt. Commun.*, 1977, **20**:200
- 6 W. B. Colson. One-body analysis of free electron lasers. *Phys. of Quan. Elect.*, 1978, **5**:157
- 7 雷仕湛, 陈建文, 赵东焕. 自由电子激光器的位相条件. 中国激光, 1983, **10**(5):257

Studies of High Signal Gain Formula of the FEL

Zhao Donghuan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

Abstract By use of the principle of multiple interactions between electrons and waves in the FEL, the expression of gain under the high signal condition is obtained. Result shows that high signal gain formula can satisfyingly explain the saturation of laser output in the experiment.

Key words high signal gain of FEL, multiple interactions between electrons and waves, coherent radiation