

# 有限束宽聚焦贝塞尔-高斯光束轴上的 光强分布\*

黄文龙 吕百达 叶一东

(四川大学光电系, 成都 610064)

刘忠永

(西南师范大学物理系, 重庆 630715)

**摘要** 运用 Collins 衍射积分推导了贝塞尔-高斯光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光强表达式。通过数值计算讨论了轴上光强的分布规律。对贝塞尔光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光强分布进行了理论和实验研究。

**关键词** 圆光阑, 贝塞尔-高斯光束, 贝塞尔光束

自从 Rochester 大学的 Durnin 等人首次报道贝塞尔光束的演示性实验以来, 由于其具有“无衍射”的奇异特性和十分诱人的应用前景, 国际上迅速掀起了对贝塞尔光束, 贝塞尔-高斯光束的研究热潮, 相继有不少理论和实验成果报道<sup>[1~6]</sup>。本文从旁轴近似的 Collins 公式出发, 推导了贝塞尔-高斯光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光强表达式。把光强分布表示成 Lommel 级数的函数形式, 有效地节约了机时。通过数值计算讨论了轴上光强的分布规律。作为贝塞尔-高斯光束的一个特例, 对贝塞尔光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光强进行了理论和实验研究。实验中所用的产生贝塞尔光束的元件为轴棱锥, 轴棱锥系统具有装置简单, 转换效率高等特点。采用扫描导轨带动的硅光电管和小孔扫描装置探测轴上光强的分布, 用  $x-y$  函数记录仪记录。

## 1 贝塞尔-高斯光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光强表达式的推导

如图 1 所示, 设入射到透镜上的光束场分布为

$$u(r_1, 0) = A_0 J_0(\alpha r_1) \exp\left(-\frac{r_1^2}{w^2}\right) \quad (1)$$

$A_0$  为常量,  $w$  为高斯光束的束腰尺寸,  $J_0$  为第一类零阶贝塞尔函数,  $\alpha^{-1}$  为贝塞尔光束的零级光斑尺寸。

柱坐标系下的 Collins 公式有下面的形式

$$u(r_2, l_2) = \frac{ik}{B} \exp\left[-ik\left(l_2 + \frac{r_2^2}{2l_2}\right)\right] \int_0^a u(r_1, 0) \exp\left(\frac{-ikAr_1^2}{2B}\right) J_0\left(\frac{kr_1r_2}{B}\right) r_1 dr_1 \quad (2)$$

\* 本课题为国家 863 410-1 高技术项目。

收稿日期: 1994 年 7 月 19 日; 收到修改稿日期: 1994 年 9 月 7 日

$A, B, C, D$  为传输变换矩阵元

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - l_2/f & l_2 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$a$  为圆光阑半径,  $f$  为透镜焦距,  $l_2$  为考察面离透镜的距离。把(1), (3)式代入(2)式, 令  $r_2 = 0$ , 经过整理得贝塞尔-高斯光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光场表达式

$$u^{BG}(0, u) = i2A_0 \exp(-ikl_2) (\pi N_a - u) \int_0^a \exp\left[-(\beta - iu) \left(\frac{r_1}{a}\right)^2\right] J_0 \frac{2ar_1}{a} \frac{r_1}{a} d\left(\frac{r_1}{a}\right) \quad (4)$$

这里

$$N_a = a^2/\lambda f \quad (5)$$

$$\beta = (a/w)^2 \quad (6)$$

$$\Delta z = (l_2 - f)/f \quad (7)$$

$$u = \pi N_a \Delta z / (1 + \Delta z) \quad (8)$$

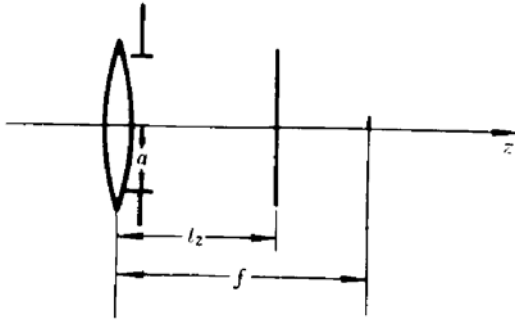


Fig. 1 A Bessel-Gauss beam focused by an aperture lens

$N_a$  为从焦点看去的光阑的非涅耳数,  $\beta$  为截断参数<sup>[7]</sup>,  $\Delta z$  为归一化传输距离。可对(4)式运用辛普生法进行数值计算, 但由于积分因子中贝塞尔函数项  $J_0(\alpha r_1)$  的强烈振荡, 使数值计算时的收敛速度很慢, 特别对某些参数耗时严重, 必须在高档计算机上

才能进行。我们把(4)式化成 Lommel 级数的函数形式, 可以有效地克服上述困难, 具体推导过程如下。

运用贝塞尔函数的递推公式

$$\int_0^x V^n J_{n-1}(V) dV = x^n J_n(x) \quad (9)$$

$J_{n-1}, J_n$  为第一类  $n-1, n$  阶贝塞尔函数, 对(4)式重复地进行分步积分, 经过冗长的数学推导, 得

$$u^{BG}(0, u) = \frac{iA_0(\pi N_a - u)}{\beta - iu} \exp(-ikl_2) \exp[-(\beta - iu)] (S_1^{BG} - iS_2^{BG}),$$

$$\frac{2(\beta^2 + u^2)^{1/2}}{\alpha a} < 1 \quad (10a)$$

这里

$$S_1^{BG} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2(\beta^2 + u^2)^{1/2}}{\alpha a} \right]^n \cos(n\sigma) J_n(\alpha a) \quad (11a)$$

$$S_2^{BG} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2(\beta^2 + u^2)^{1/2}}{\alpha a} \right]^n \sin(n\sigma) J_n(\alpha a)$$

$$\sigma = \arctg(u/\beta) \quad (12)$$

运用贝塞尔函数的生成函数

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \quad (13)$$

(10a) 式也可以化成

$$u^{BG}(0, u) = \frac{iA_0(\pi N_a - u)}{\beta - iu} \exp(-ikl_2) \left\{ \exp\left[-\frac{a^2 a^2}{4(\beta - iu)}\right] - \exp[-(\beta - iu)] (S_3^{BG} + iS_4^{BG}) \right\}$$

$$\frac{2(\beta^2 + u^2)^{1/2}}{\alpha a} > 1 \quad (10b)$$

这里

$$S_3^{BG} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -\frac{\alpha a}{2(\beta^2 + u^2)^{1/2}} \right]^n \cos(n\sigma) J_n(\alpha a) \quad (11b)$$

$$S_4^{BG} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -\frac{\alpha a}{2(\beta^2 + u^2)^{1/2}} \right]^n \sin(n\sigma) J_n(\alpha a)$$

注意到(11a), (11b) 是 Lommel 级数, 当  $2(\beta^2 + u^2)^{1/2}/\alpha a$  不趋近于 1 时, 它们是一列收敛很快的级数, 这在数值计算中就可以体现出它的优越性。

运用  $I = uu^*$  得贝塞尔-高斯光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光强表达式

$$I^{BG}(0, u) = \frac{|A_0|^2(\pi N_a - u)^2}{\beta^2 + u^2} \exp(-2\beta)(S_1^{BG^2} + S_2^{BG^2}), \quad \frac{2(\beta^2 + u^2)^{1/2}}{\alpha a} < 1 \quad (14a)$$

$$I^{BG}(0, u) = \frac{|A_0|^2(\pi N_a - u)^2}{\beta^2 + u^2} \{ \exp[-2(D^{BG} - 1)\beta] - 2S_3^{BG} \exp(-D^{BG}\beta) \cos(D^{BG}u) + 2S_4^{BG} \exp(-D^{BG}\beta) \sin(D^{BG}u) + \exp(-2\beta)(S_3^{BG^2} + S_4^{BG^2}) \}, \quad \frac{2(\beta^2 + u^2)^{1/2}}{\alpha a} > 1 \quad (14b)$$

这里

$$D^{BG} = 1 + \frac{\alpha a}{4(\beta^2 + u^2)} \quad (15)$$

在(11), (12), (14) 中令  $\beta = 0$  就得到贝塞尔光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光强表达式及在数值计算中所需使用的 Lommel 级数表达式。

$$I^B(0, u) = \frac{|A_0|^2(\pi N_a - u)^2}{u^2} (S_1^{B^2} + S_2^{B^2}), \quad \left| \frac{2u}{\alpha a} \right| < 1 \quad (16a)$$

这里

$$S_1^B = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2u}{\alpha a} \right)^{2n} J_{2n}(\alpha a) \quad (17a)$$

$$S_2^B = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{2u}{\alpha a} \right)^{(2n-1)} J_{2n-1}(\alpha a)$$

$$I^B(0, u) = \frac{|A_0|^2(\pi N_a - u)^2}{u^2} \{ 1 - 2S_3^B \cos(D^B u) + 2S_4^B \sin(D^B u) + S_1^{B^2} + S_2^{B^2} \}, \quad \left| \frac{2u}{\alpha a} \right| < 1 \quad (16b)$$

这里

$$S_3^B = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\alpha a}{2u} \right)^{2n} J_{2n}(\alpha a) \quad (17b)$$

$$S_4^B = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{\alpha a}{2u} \right)^{(2n+1)} J_{2n+1}(\alpha a)$$

$$D^B = 1 + \alpha^2 a^2 / (4u^2) \quad (18)$$

(16), (17), (18) 式也可从(4) 式中令  $\beta = 0$  直接推导得到。

在(11b), (12), (14b) 式中令  $\alpha = 0$  得束腰位于透镜处受圆光阑限孔的高斯光束的轴上光强表达式

$$I^G(0, u) = I_F^G \left( 1 - \frac{u}{\pi N_a} \right)^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 + u^2} \frac{\cosh(\beta) - \cos u}{\cosh(\beta) - 1} \quad (19)$$

$\cosh$  是双曲函数,  $I_F^G$  是几何焦点处的光强, 即

$$I_p^G = I^G(0,0) = \frac{|A_0|^2 \pi^2 N_a^2}{\beta^2} [1 - 2\exp(-\beta) + \exp(-2\beta)] \quad (20)$$

(19) 式与文献[8]中(3.2)式相符合。

注意到把  $I^{BG}$  表成(14a),(14b),  $I^B$  表成(16a),(16b)两种形式都是从数值计算的角度,节约机时考虑所采用的。

## 2 数值计算及讨论

把轴上光强表示成 Lommel 级数的函数形式,数值计算就可以在普通微机上进行。为讨论轴上光强随  $\alpha$  的变化规律,引入贝塞尔光束的非涅耳数<sup>[8]</sup>

$$N_a = 1/(\lambda f \alpha^2) \quad (21)$$

为讨论轴上光强随  $w$  的变化规律,引入高斯光束的非涅耳数<sup>[7]</sup>

$$N_w = w^2/(\lambda f) \quad (22)$$

在强截断,即  $\beta = (a/w)^2 < 1$  时,选用  $N_a$ (光阑的非涅耳数),  $N_a, \beta$  为参量,在弱截断,即  $\beta > 1$  时,选用  $N_w$ (高斯光束的非涅耳数),  $N_w, \beta$  为参量来讨论轴上光强随传输距离的变化规律。利用(14),(16)式可以画出归一化轴上光强  $I/|A_0|^2$  在不同  $\beta, N_a(N_w), N_a$  下的随归一化传输距离  $\Delta z$  的变化曲线,示于图 2~图 5 之中,图 6 为贝塞尔-高斯光束经无光阑限孔透镜后的归一化轴上光强在  $\beta, N_w, N_a$  下随归一化传输距离变化曲线,数值计算时所使用的轴上光强表达式为<sup>[8]</sup>

$$I^{BG}(0, u') = \frac{|A_0|^2 (\pi N_a - u')^2}{1 + u'^2} \exp\left[-\frac{N_w}{2N_a(1 + u'^2)}\right] \quad (23)$$

这里

$$u' = (\pi N_w \Delta z)/(1 + \Delta z) \quad (24)$$

进一步令  $\alpha = 0$ , 即  $N_a \rightarrow \infty$  得高斯光束经无光阑限孔透镜后的轴上光强表达式

$$I^G(0, u') = \frac{|A_0|^2 (\pi N_w - u')^2}{1 + u'^2} \quad (25)$$

最后,我们比较利用(11),(14)式求  $I^{BG}$  和从(4)式出发,运用辛普生法求  $I^{BG}$ ,这两种方法所用的机时。数值计算在 SUPER-386 上进行,当取  $\beta = 0.01, N_a = 0.5, N_w = 0.05, \Delta z \in (-0.9, 0.9)$ ,画一条  $I^{BG}$  随  $\Delta z$  的变化曲线(取 100 点),前者大约需 5 s,后者大约需 1 min。当取  $\beta = 0, N_a = 500, N_w = 10^{-5}, \Delta z \in (-0.9, 0.9)$ ,画一条  $I^{BG}$  随  $\Delta z$  的变化曲线(取 100 点),前者大约需 30 s,后者大约需 20 h。可见运用前者确实有效地节约了机时。

## 3 实 验

实验中所使用的近似贝塞尔光束由轴棱锥产生,这个轴棱锥的作用是把平行光束变换成近似贝塞尔光束<sup>[4]</sup>,它是一种锥形光学元件,其通过轴线的横截面呈双棱镜形。这个关键元件是由我们实验室自己加工的,实验方案如下:10 mW 的 He-Ne 激光束经扩束望远镜系统后成为准直平行光正入射到轴棱锥上,再经带光阑的聚焦透镜后出射,轴棱锥、聚焦透镜、光阑这三者要做到尽量紧贴在一起。利用文献[9]所使用的方法探测光强,即用扫描导轨和带 26  $\mu\text{m}$  微孔(用读数显微镜测量)的 3Du33 硅光电管探测光强,并用  $x-y$  函数记录仪记录,实验结果示于图 7。所使用的实验参数为波长  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ , 焦距  $f = 1120 \text{ mm}$ , 圆光阑半径  $a = 2.25 \text{ mm}$ ,  $19.5 \text{ mm}$ , 轴棱锥径向尺寸为 39 mm, 小角  $\gamma = 5.3^\circ$ , 即  $\alpha = 2\pi(n-1)\gamma/\lambda = 4.776 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$

(材料为  $K_9$  玻璃, 折射率  $n = 1.52$ ,  $\gamma$  用弧度表示)。

## 4 结 论

4.1 当  $\beta$  足够小时(如  $\beta = 0.01$ ), 贝塞尔-高斯光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光强分布和贝塞尔光束( $\beta = 0$ )经圆光阑限孔透镜后的轴上光强分布已无明显区别(图 2 和图 3 中虚线所示)。

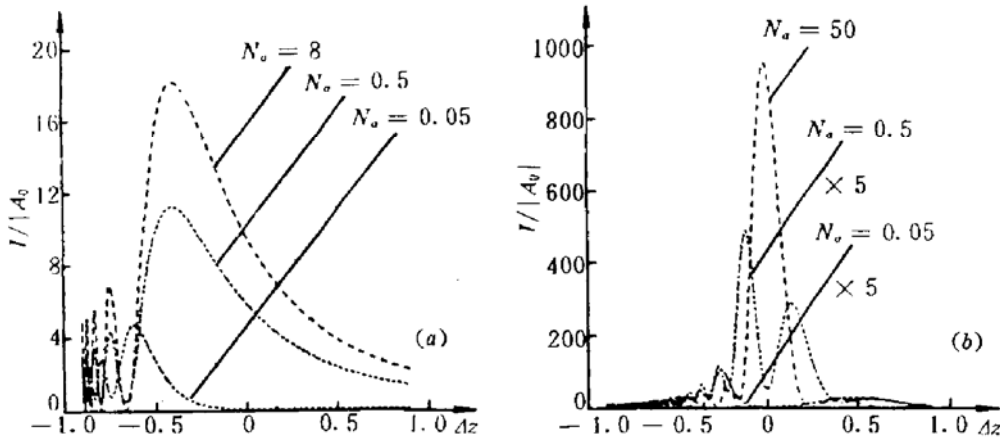


Fig. 2 The normalized axial intensity distribution  $I/|A_0|^2$  of a Bessel beam as a function of the normalized propagation distance  $\Delta z$ ,  $\beta = 0$

(a)  $N_0 = 1, N_0 = 0.05, 0.5$  and  $8$ ; (b)  $N_0 = 10, N_0 = 0.05, 0.5$  and  $50$

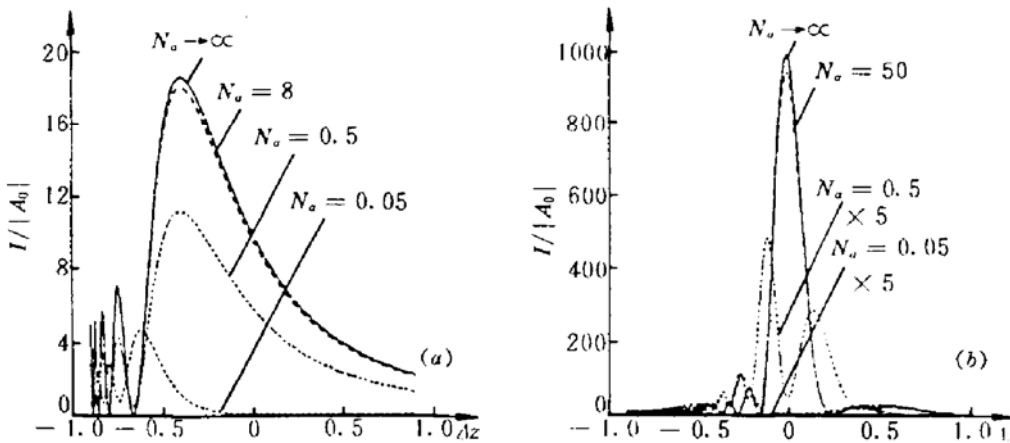


Fig. 3 The normalized axial intensity distribution  $I/|A_0|^2$  of a Bessel-Gauss beam as a function of the normalized propagation distance  $\Delta z$ ,  $\beta = 0.01$

(a)  $N_0 = 1, N_0 = 0.05, 0.5, 8$  and  $N_0 \rightarrow \infty$ ; (b)  $N_0 = 10, N_0 = 0.05, 0.5, 50$  and  $N_0 \rightarrow \infty$

4.2 当  $\beta$  足够大时(如  $\beta = 6.25$ ), 贝塞尔-高斯光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光强分布和贝塞尔-高斯光束经无光阑限孔( $\beta \rightarrow \infty$ )透镜后的轴上光强分布已无明显区别(图 5 和图 6)。

4.3 当  $N_0$  足够大时, 贝塞尔-高斯光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光强分布和高斯光束( $N_0 \rightarrow \infty$ )经圆光阑限孔透镜后的轴上光强分布已无明显区别(图 3, 图 4, 图 5 中间隔较大的虚线和实线所示); 当  $N_0$  足够大时, 贝塞尔-高斯光束经无光阑限孔透镜后的轴上光强分布和高

斯光束( $N_o \rightarrow \infty$ )经无光阑限孔透镜后的轴上光强分布已无明显区别(图6中间隔较大的虚线和实线所示)。

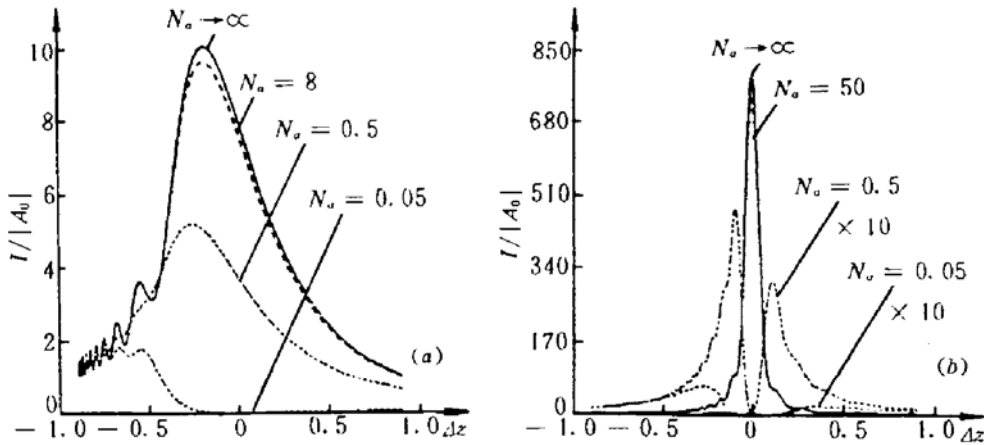


Fig. 4 The normalized axial intensity distribution  $I/|A_0|^2$  of a Bessel-Gauss beam as a function of the normalized propagation distance  $\Delta z$ ,  $\beta = 2.25$

(a)  $N_o = 1, N_o = 0.05, 0.5, 8$  and  $N_o \rightarrow \infty$ ; (b)  $N_o = 10, N_o = 0.05, 0.5, 50$  and  $N_o \rightarrow \infty$

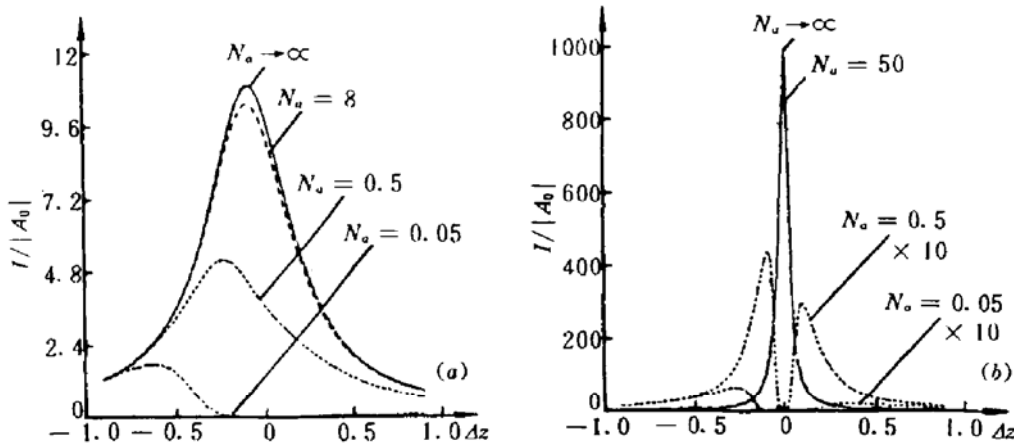


Fig. 5 The normalized axial intensity distribution  $I/|A_0|^2$  of a Bessel-Gauss beam as a function of the normalized propagation distance  $\Delta z$ ,  $\beta = 6.25$

(a)  $N_o = 1, N_o = 0.05, 0.5, 8$  and  $N_o \rightarrow \infty$ ; (b)  $N_o = 10, N_o = 0.05, 0.5, 50$  and  $N_o \rightarrow \infty$

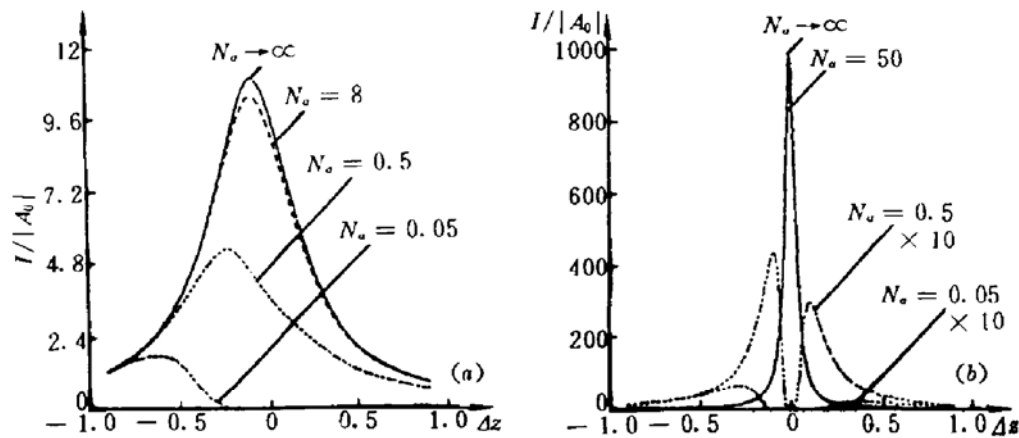


Fig. 6 The normalized axial intensity distribution  $I/|A_0|^2$  of a Bessel-Gauss beam as a function of the normalized propagation distance  $\Delta z$ ,  $\beta \rightarrow \infty$

(a)  $N_o = 1, N_o = 0.05, 0.5, 8$  and  $N_o \rightarrow \infty$ ; (b)  $N_o = 10, N_o = 0.05, 0.5, 50$  and  $N_o \rightarrow \infty$

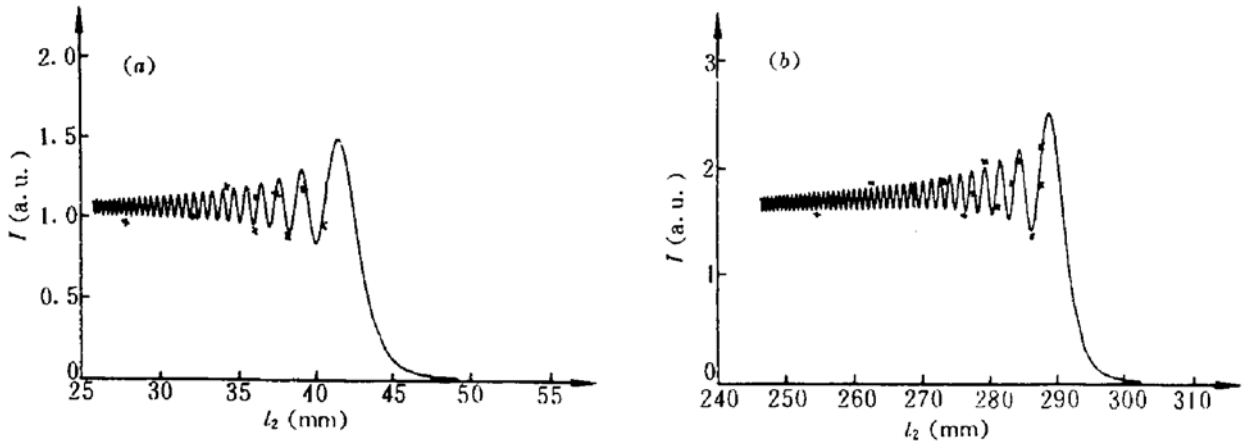


Fig. 7 The axial intensity distribution  $I$  (a. u.) of a Bessel beam as a function of propagation distance  $l_2$ ,  $f = 1120$  mm,  $\alpha = 4.776 \times 10^5$   
(— theoretical,  $\times$  experimental) (a)  $a = 2.25$  mm, (b)  $a = 19.5$  mm

4.4 对贝塞尔光束经圆光阑限孔透镜后的轴上光强分布的实验研究表明,实验与理论符合得较好。

### 参 考 文 献

- 1 J. Durnin, J. J. Miceli *et al.*. Diffraction-free beam. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(15): 1499
- 2 Y. Lin, W. Seka *et al.*. Experimental investigation of Bessel beam characteristics. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(5): 2708
- 3 J. Turunen, A. Vasara *et al.*. Holographic generation of diffraction-free beams. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(9): 3959
- 4 R. M. Herman, T. A. Wiggins. Production and uses of diffractionless beams. *J. Opt. Soc. Am.*, 1991, **A8**(6): 932
- 5 P. L. Overfelt, C. S. Kenney. Comparison of the propagation characteristics of Bessel, Bessel-Gauss, and Gaussian beams diffracted by a circular aperture. *J. Opt. Soc. Am.*, 1991, **A8**(5): 732
- 6 F. Gori, G. Guattari *et al.*. Bessel-Gauss beams. *Opt. Commun.*, 1987, **64**: 491
- 7 Y. Li, E. Wolf. Focal shifts in focused truncated Gaussian beams. *Opt. Commun.*, 1982, **42**: 151
- 8 Baida Lü, Wenlong Huang. Focal shift in unapertured Bessel-Gauss beams. *Opt. Commun.*, 1994, **109**: 43
- 9 吕百达, 张 彬 等. 有限束宽无衍射光束特性的研究. *科学通报*, 1994, **39**(2): 125

## Axial Intensity Distribution of a Bessel-Gauss Beam Focused by an Aperture Lens

Huang Wenlong Lü Baida Ye Yidong

(Department of Opto-Electronic Science & Technology, Sichuan University, Chengdu 610064)

Liu Zhongyong

(Department of Physics, Southwest Teacher's University, Chongqing 630715)

**Abstract** Analytic expressions for axial intensity distributions of a Bessel-Gauss beam focused by an aperture lens have been derived by using Collins diffraction integral, and discussed by numerical calculations. As a limiting case, the axial intensity distributions of a

Bessel beam focused by an aperture lens have also been studied both theoretically and experimentally.

**Key words** aperture, a Bessel-Gauss beam, a Bessel beam

---

## CHINESE JOURNAL OF LASERS B

Vol. B4, No. 1 (Series No. 19), February 20, 1995

(January/February)

---

### CONTENTS

#### LASER DEVICES

- Inverstigation of self-starting for self-mode-locked Ti : sapphire laser  
 ..... WEI Zhiyi, LEE Wingkee, WONG Saipeng et al. (1)
- Experimental study on laser behaviours of Ti : sapphire crystal grown by IFUS method  
 ..... XIE Jiangping, SUN Xiaoquan, WANG Junmei et al. (9)
- Xenon flash lamp pumped miniature Nd : S-VAP pulsed laser  
 ..... ZHAO Shengzhi, WANG Qingpu, ZHANG Xingyu et al. (13)
- Studies on passive mode-locking characteristics of Nd : YAG laser with a nonlinear coupled-cavity  
 ..... CHENG Zhao, XU Dalun (19)
- The research of scattering cross-section and energy-extraction in FEL ..... ZHU Jiaqing (25)
- Novel wavefront corrector for adaptive laser resonator  
 ..... ZHANG Guoping, YE Jiaxiong LI Zhanguang (31)

#### LASER PHYSICS AND LASER CHEMISTRY

- Small-amplitude solitons in nonlinear-saturation glass fibers ..... YU Zhongyuan, CHEN Lujun (37)
- The reactions of nickel ion with  $n$ -alkane in the gas phase  
 ..... ZHANG Bing, ZHANG Feihua, JI Yufeng et al. (47)

#### EXPERIMENTAL TECHNIQUES AND ELEMENTS

- The realization of optical 2D folded perfect shuffle with complex holographic lens  
 ..... ZHANG Erping, YU Chongxiu, YAN Xiaomei et al. (51)
- The influence of the weak radiation on the gas discharge time delay  
 ..... ZHENG Hui, WANG Yumin, LOU Qihong (57)
- Method and experiments of linearly splitting He-Ne laser modes  
 ..... ZHANG Shulian, HAN Yanmei (61)
- Analyses of the properties of tunable Faraday anomalous dispersion optical filter at 589nm  
 ..... PENG Yufeng, LI Xuexin, ZHANG Liang et al. (65)

#### LASER MATERIALS

- The dynamic behaviour analysis of up-conversion luminescence in  $\text{ErP}_5\text{O}_{14}$  glass  
 ..... CHEN Jinkai, CHEN Xiaobo, HUANG Zhiwei et al. (73)
- Experimental investigation of the nonlinear coupling strength of a photorefractive crystal  
 ..... WANG Jiayou, LI Xiaochung, GUO Siji et al. (81)
- New progress in Ti : sapphire research and development ..... ZHANG Qiang, DENG Peizhen (87)

#### LASER APPLICATIONS

- Studies on poplar parthenogenesis induced by laser  
 ..... CHEN Zhenggu, YU Wansu, XU Chenglin et al. (91)