

# 变参数 Smith-Purcell 型自由电子激光的小信号增益公式

熊平凡

(孝感高等师范专科学校物理系, 432100)

王友棠

(上海交通大学应用物理系 上海 200030)

**摘要** 利用微扰展开法导出了变参数 Smith-Purcell 型自由电子激光小信号增益表达式,其增益谱函数因子在形式上与变参数 Wiggler 情况的表达式相同。在此基础上讨论了光栅常数均匀变化时的小信号增益。结果表明:当电子入射速度低于系统初始谐振速度的某一范围时,有较高的小信号增益;在保证一定的饱和抽取效率情况下,为了提高小信号增益,应适当地选取光栅的空间频率变化率。

**关键词** 自由电子激光, Smith-Purcell 效应, 空间频率可变光栅

## 1 引言

在利用 Smith-Purcell 效应<sup>[1]</sup>提出红外自由电子激光(FEL)的理论<sup>[2]</sup>后,文献[3]讨论了采用变参数光栅来提高激光器输出功率的方法。对于一个激光器件来说,除了最后的输出功率和饱和抽取效率外,小信号增益是另一个重要指标。

本文在一维单粒子理论框架下,得到了变参数 Smith-Purcell 型自由电子激光的小信号增益表达式,其增益谱函数的形式与变参数 Wiggler 的小信号增益相同。由增益公式可见:当电子的入射速率在低于初始共振速度的某一范围时,有较高的小信号增益;在其他条件一定时,为保证器件有足够高的小信号增益,应适当选取光栅的空间频率变化率;此外,变参数时的小信号增益表达式的标度律与常参数情况的相同。

## 2 变参数时的小信号增益

图 1 中,设速度为  $v$ ,沿  $z$  方向垂直光栅槽沟掠过光栅表面的电子与电场强度沿  $z$  方向、波矢为  $K_n = K_s \sin\theta + 2\pi n/d$  的第  $n$  阶表面衰波产生共振,由共振条件<sup>[1]</sup>有

$$\lambda_s = \frac{d}{n}(\beta^{-1} - \sin\theta) \quad (1)$$

其中  $d$  为光栅常数,  $K_s = \omega_s/c = 2\pi/\lambda_s$ ,  $\beta = v/c$ ,  $\lambda_s$  为激光场的辐射波长,  $c$  为真空中的光速。

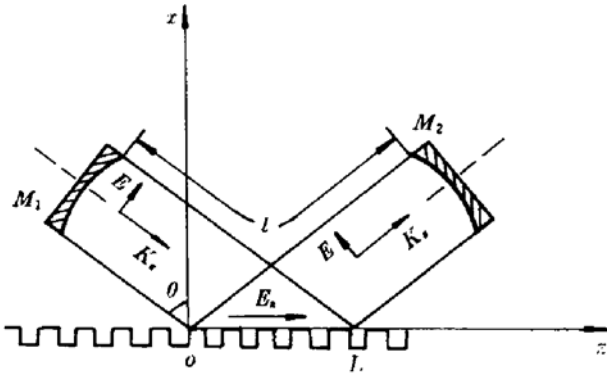


Fig. 1 Schematic diagram of a Smith-Purcell laser

取表面衰波的第  $n$  阶谐波的电场强度的  $z$  分量表示式为

$$E_s = E_{s0} \sin \psi(z) \quad (2)$$

$$\psi(z) = \int_0^z k_s dz - \omega_s \int_0^z \frac{dz}{c\beta} + \varphi(z) + \varphi_0 \quad (3)$$

式中  $\varphi_0$  为电子的初位相,  $\varphi(z)$  为由于采用变参数光栅在  $z$  处所引起的相移, 下面略去此项。单电子的一维相对论运动方程为

$$\frac{d(mc\beta\gamma')}{dt} = -eE_{s0} \sin \psi(z) \quad (4)$$

令  $s = z/L$ ,  $L$  为电子与场相互作用的有效长度, 由  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  和  $\frac{1}{c\beta} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dz} = \frac{d}{Lds}$ , (4) 式可写为

$$\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{eE_{s0}L \sin \psi(s)}{mc^2} \quad (5)$$

在小信号增益情况下,  $eE_{s0}L/mc^2 \ll \gamma_0$ , 故我们可取  $eE_{s0}L/mc^2$  为展开参数。将  $\gamma, \beta$  和  $\psi(s)$  按其展开, 求解方程(5) 后再对初位相  $\varphi_0$  求平均, 得

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{(0)} \rangle &= \gamma_{(0)} = \gamma_0, & \langle \gamma_{(1)} \rangle &= 0 \\ \langle \gamma_{(2)} \rangle &= \frac{-e^2 E_{s0}^2 K_s L^3}{2m^2 c^4 \beta_0^3 \gamma_0^3} \int_0^1 ds \int_0^s ds' (s - s') \sin[\theta_0(s) - \theta_0(s')] \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\gamma_{(0)}, \gamma_{(1)}$  和  $\gamma_{(2)}$  分别为展开后  $\gamma$  的零级、一级和二级量, 且

$$\theta_0(s) = L \int_0^s K_s ds - \omega_s L s / c\beta_0 \quad (7)$$

由能量守恒定律

$$n_0 L A_s m c^2 \langle \gamma_{(2)} \rangle + \frac{1}{2} \epsilon_0 [E_0^2(\tau) - E_0^2(0)] A_f l = 0 \quad (8)$$

和

$$E_0^2(\tau) = E_0^2 \exp(2\alpha\tau) \approx E_0^2(0) (1 + 2\alpha\tau) \quad (9)$$

可得光场的单程增益为

$$G \equiv \alpha \frac{l}{c} = -\frac{n_0 F m c^2}{\epsilon_0 E_0^2(0)} \beta_0 \langle \gamma_{(2)} \rangle \quad (10)$$

在(8)~(10)式中,  $n_0$  为电子束数密度,  $l$  为光腔有效长度,  $A_s$  和  $A_f$  分别为电子束和光场的有效横截面积,  $F = A_s/A_f$  为面积因子,  $\tau = L/c\beta_0$ ,  $\alpha$  为激光场的时间增长率。

将(6)式代入(10)式, 并利用积分区域的对称性得

$$G = \frac{\omega_s^2 a_s^2 F K_s L^3}{2\beta_0^2 c^2 \gamma_0^3} \left[ \int_0^1 s \cdot \sin \theta_0(s) ds \int_0^1 \cos \theta_0(s) ds - \int_0^1 s \cdot \cos \theta_0(s) ds \int_0^1 \sin \theta_0(s) ds \right] \quad (11)$$

式中  $\omega_s^2 = n_0 e^2 / m \epsilon_0$ ,  $a_s = E_{s0} / E_0(0)$  为场耦合因子。不难由(11)式得到常参数情况下的小信号增益公式<sup>[4,5]</sup>。

由(11)式看到, 变参数时的小信号增益的标度律与常参数情况的相同<sup>[4,5]</sup>, 并且, 增益表

达式(11)中的积分因子与变参数 Wiggler 情况下的小信号增益表达式中相应的积分因子具有相同的形式。

以下考虑光栅的空间频率  $\nu = 1/d$  沿  $z$  方向均匀变化的情况。 $\nu$  的变化形式取为

$$\nu = \nu_0 + b_0 z \quad (12)$$

$\nu_0$  为  $z = 0$  处光栅的空间频率,  $\nu_L$  为  $z = L$  处的空间频率,  $b_0 = d\nu/dz = (\nu_L - \nu_0)/L$  为空间频率的变化率。由此可写出第  $n$  阶衰波的波矢为

$$K_n = K_{n0} + bz \quad (13)$$

其中  $K_{n0} = K_n \sin\theta + 2\pi n\nu_0$ ,  $b = 2\pi n b_0$ , 由(7)式得

$$\theta_0(s) = \eta_0 s + \frac{1}{2} \eta_b s^2 \quad (14)$$

$\eta_0 = (K_{n0} - \omega_s/c\beta_0)L$  为初始失谐参量,  $\eta_b = bL^2$  为光栅空间频率变化所引起的失谐参量。变参数情况下的增益谱函数  $F(\eta_0, \eta_b)$  的形式为

$$F(\eta_0, \eta_b) = 4 \left[ \int_0^1 s \cdot \sin\theta_0(s) ds \int_0^1 \cos\theta_0(s) ds - \int_0^1 s \cdot \cos\theta_0(s) ds \int_0^1 \sin\theta_0(s) ds \right] \quad (15)$$

图 2 绘出了三个不同  $\eta_b$  值的  $F(\eta_0, \eta_b)$  随初始失谐参量  $\eta_0$  的变化曲线。

由图 2 和增益表达式(11)可知, 为了保证器件有足够高的增益, 其他参数一定时, 应适当选取光栅空间频率变化率  $b_0$ ; 为使系统的增益达到最大值, 电子入射时的速率可低于初始谐振速度。这与变参数 Wiggler 的情况是相同的<sup>[6]</sup>。

另外由(15)式和图 2 得到函数  $F(\eta_0, \eta_b)$  的几个特点: 1)  $F(-\eta_0, -\eta_b) = -F(\eta_0, \eta_b)$ ; 2) 在  $\eta_b$  一定时,  $F(\eta_0, \eta_b)$  对于点  $\eta_0 = -(2\pi/25)\eta_b$  是反对称的; 3) 随着  $\eta_b$  的增大,  $F(\eta_0, \eta_b)$  的最大值单调下降。

关于变参数情况下激光器的饱和抽取效率和饱和光场等问题, 将另文讨论。

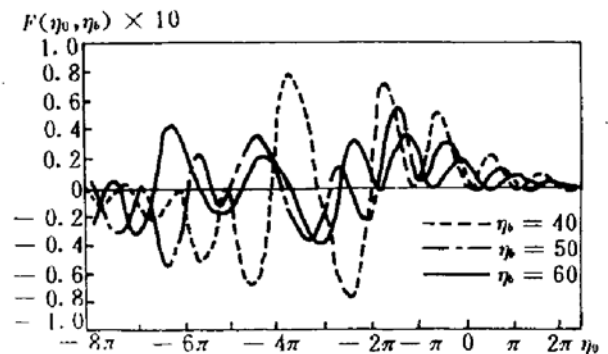


Fig. 2 The gain spectrum function factor  $F(\eta_0, \eta_b)$  as a function of the initial detuning parameter  $\eta_0$  for three different parameters  $\eta_b$

## 参 考 文 献

- 1 S. J. Smith, E. M. Purcell. Visible Light from Localized Surface Charges Moving across a Grating. *Phys. Rev.*, 1953, **92**: 1069
- 2 J. M. Wachtel. Free-electron lasers using the Smith-Purcell effect. *J. Appl. Phys.*, 1979, **50**(1): 49~56
- 3 陈建文, 傅淑芬, 张大可. Smith-Purcell 型自由电子激光器. *光学学报*, 1984, **4**(7): 607~611
- 4 A. Gover, Z. Livni. Operation regimes of Cerenkov-Smith-Purcell free electron lasers and T. W. Amplifiers. *Opt. Commun.*, 1978, **26**(3): 375~380
- 5 A. Gover, P. Sprangle. A unified theory of magnetic brems-strahlung, electrostatic brems-strahlung, Compton-Raman Scattering, and Cerenkov-Smith-Purcell free-electron lasers. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1981, **QE-17**(7): 1196~1215
- 6 兰 可, 施义晋. 变参数谐振器中小信号增益公式. *强激光与粒子束*, 1991, **3**(1): 12~22

## Formula for the Small Signal Gain of the Variable Parameter Smith-Purcell Effect FEL

Xiong Pinfan

*(Department of Physics, Xiaogan Teachers College, 432100)*

Wang Youtang

*(Department of Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)*

**Abstract** Using a disturbance develop method, we have obtained the formula for the small signal gain (S. S. G.) of the variable parameter Smith-Purcell effect FEL and show that the gain spectrum function factor takes the same form as the variable parameter Wiggler. On the basis of this formula, the S. S. G. for linerly varying of grating space frequency is discussed. The results show that when the speed of the injected electron is within a range, lower than the initial resonance speed, a higher S. S. G. can be attained, and that in order to enhance S. S. G. for a given saturation efficiency, the changing rate of grating space frequency should be chosen properly.

**Key words** free electron laser, Smith-Purcell effect, variable space frequency of grating