第 22 卷 第 2 期
1995 年 2 月

中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS

Vol. A22, No. 2
February, 1995

各种实际光束的 M^2 参数特性比较*

陈培锋 丘军林
(华中理工大学激光研究所，武汉 430074)

提要 首先证明基模高斯光束具有最小的 M^2 值，进而讨论了多模激光束、部分相干光束和波前畸变光束的 M^2 值的特性，以及相互之间的关系。

关键词 M^2 参数

1 引 言

国际标准化组织最近提出了光束传输因子 M^2 参数的概念，从而在评价激光束质量方面前进了一大步。本文拟证明 M^2 参数的最小值，并在此基础上讨论引起光束 M^2 参量增大的各种因素。

2 M^2 因子的定义[1]

根据国际标准化度量局的定义，光束的光斑直径和发散角分别定义为

$$D_x^2(Z) = 4^2\int x^2 I(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

$$\theta_x^2 == 4^2\int \theta_x^2 I(\theta_x,\theta_y)\,\mathrm{d}\theta_x\mathrm{d}\theta_y \tag{2}$$

注意，上式中取 Z 轴沿光束中心传播方向，这一简化不会给后面的结果带来影响。

由(1)，(2) 式可以推得在近光轴条件下有

$$D^2(Z) = D_0^2 + \theta^2(Z - Z_0)^2 \tag{3}$$

其中 D_0 为腰斑直径，Z_0 则为腰斑位置。

根据国际标准化组织的定义，M^2 参数定义为

$$D_0 \cdot \theta = (4\lambda/\pi)\, M^2 \tag{4}$$

下面我们将证明 M^2 参数存在一个最小值，并由此揭示许多 M^2 参数的物理本质。

3 证明 M^2 参数的极小值

设任意光束的横向光场振幅分布为 $\Phi(x)$，定义

* 本项目受武汉市科委“晨光计划”支持。

收稿日期：1994 年 4 月 4 日；收到修改稿日期：1994 年 5 月 30 日

$$I(\xi)=\int\left|\xi\Phi(x)x-\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)\right|^2\mathrm{d}x\geqslant 0 \tag{5a}$$

展开得

$$I(\xi)=\xi^2\int x^2\Phi(x)\Phi^*(x)\mathrm{d}x-\xi\cdot\frac{\lambda}{2\pi}\int\left[x\Phi(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Phi^*(x)+x\Phi^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)\right]\mathrm{d}x+\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\cdot\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)\right]\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi^*(x)\right]\mathrm{d}x \tag{5b}$$

利用分部积分法可以证明

$$\int x\Phi^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)\mathrm{d}x=x\Phi^*(x)\Phi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int\left[\Phi(x)\Phi^*(x)+\Phi(x)\cdot x\frac{\partial}{\partial x}\Phi^*(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)\right]\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi^*(x)\right]\mathrm{d}x=-\int\Phi^*(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x)\,\mathrm{d}x$$

则(5b)变为

$$I(\xi)=\xi^2\int x^2\Phi^*(x)\Phi(x)\mathrm{d}x+\xi\cdot\frac{\lambda}{2\pi}\int\Phi^*(x)\Phi(x)\mathrm{d}x-\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\cdot\int\Phi^*(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x)\mathrm{d}x \tag{5c}$$

上式大于0,则有

$$-\int x^2\Phi(x)\Phi^*(x)\mathrm{d}x\cdot\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\int\Phi^*(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\Big/4 \tag{6}$$

同时利用傅氏变换定义和角谱分析理论可得

$$-\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\cdot\int\Phi^*(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x)\mathrm{d}x=\int\theta_x^2\cdot\Phi^*(\theta_x)\cdot\Phi(\theta_x)\mathrm{d}\theta_x \tag{7}$$

其中

$$\Phi(\theta_x)=\int\Phi(x)\exp\left[i2\pi\frac{\theta_x}{\lambda}x\right]\mathrm{d}x \tag{8}$$

将(7)式代入(6)式得

$$\frac{D^2}{16}\cdot\frac{\theta^2}{16}\geqslant\left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \tag{9}$$

由此得

$$D_0\cdot\theta_x=\frac{4\lambda}{\pi}\cdot M^2\geqslant\frac{4\lambda}{\pi}$$

则

$$M^2\geqslant 1 \tag{10}$$

至此我们得到结论:M^2 因子的最小值为1。

4 M^2 参数的物理含义

证明 M^2 参数的极小值的过程与量子力学中求证测不准关系的证明过程完全类似,由此可见 M^2 参数最小值取1这一结论与量子力学的测不准关系具有一种本质上的关联。事实上比较上述求证过程和量子力学的算符定义可以发现:光学波动角谱理论中的发散角 θ_x 对应于量子力学中的动量算符。因为根据光子的波粒二像性、光子的动量 $\bar{k}\approx(\theta_x\bar{i}+\theta_y\bar{j}+\bar{k})k$。由此可见光学中的衍射现象实际上对应于量子力学中的测不准关系。

通过上面的分析可以看出,M^2 参数定义揭示了非常深奥的物理本质现象。与之相关的光

斑直径和发散角的定义也同样形成了合理的理论体系。

在量子力学中我们知道，位置与动量的最小测不准态为相干态。而相干态的动量和位置的几率分布与光学中的基模高斯光束的振幅和发散角的分布形式完全一致。由此可以推知基模高 斯光束就是 M^2 值取最小的光场分布。这一点完全可以直接证明。但这并不说明只有高斯光束才是唯一可使 M^2 值取最小值的光束。

通过上述讨论又可发现，M^2 值的大小表示了实际光束偏离衍射极限值的程度。因此，从这一 角度出发，我们可以认为 M^2 因子表征了一个光束的质量。下面我们将讨论各种使光束偏离衍射极限的因素，从而对 M^2 参数取得更深刻的认识。

5　多模高斯激光束的 M^2 参数

在作者另一篇文章[2]中证明了在模式非简并情况下，多模激光器各个模式之间不存在相干，如果假定本征模式为高斯模，则多模激光束即为混合模高斯光束，此时有[3]

$$M_x^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2m+1)\ |C_{mn}|^2 \tag{11}$$

$$M_y^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\ |C_{mn}|^2 \tag{12}$$

$$M_r^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2m+p+l+1)\ |C_{pl}|^2 \tag{13}$$

其中 C_{mn}, C_{pl} 为权重因子，有

$$\sum_{m,n} |C_{mn}|^2 = 1 \qquad \sum_{p,l} |C_{pl}|^2 = 1 \tag{14}$$

由(14)式可以证明

$$M_x^2,\ M_y^2,\ M_r^2 > 1 \tag{15}$$

由此可见，多模中高阶模的存在使光束质量下降。

6　一般部分相干光束的 M^2 值

设有一部分相干准单色光束，在传播方向的横截面内有互强度函数

$$J_{12}(x_1,y_1,x_2,y_2) = \int G_{12}(\theta_x,\theta_y,\theta_x',\theta_y')\cdot\exp\left[i2\pi\left(\frac{\theta_x}{\lambda}x_1+\frac{\theta_y}{\lambda}y_1-\frac{\theta_x'}{\lambda}x_2-\frac{\theta_y'}{\lambda}y_2\right)\right]\mathrm{d}\theta_x\mathrm{d}\theta_y\mathrm{d}\theta_x'\,\mathrm{d}\theta_y' \tag{16}$$

则其发散角定义为[4]

$$\theta_x^2 = \frac{\int \theta_x'^2 G_{12}(\theta_x',\ \theta_y',\ \theta_x',\ \theta_y')\ \mathrm{d}\theta_x'\,\mathrm{d}\theta_y'}{\int G_{12}(\theta_x',\ \theta_y',\ \theta_x',\ \theta_y')\ \mathrm{d}\theta_x'\,\mathrm{d}\theta_y'} \tag{17}$$

其中 $G_{12}(\theta_x,\ \theta_y,\ \theta_x',\ \theta_y')$ 是我们定义的空间谱互相干函数，互强度函数 J_{12} 可写为

$$J_{12}(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2) = \mu(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)\,|u(x_1,\ y_1)|\cdot|u(x_2,\ y_2)| \tag{18}$$

其中 $\mu(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)$ 为互相干度，而 $u(x,y)$ 则为横截面内的光振幅分布。

由此可得

$$G_{12}(\theta_x, \theta_y, \theta_x', \theta_y') = \tilde{\mu}(\theta_x, \theta_y, \theta_x', \theta_y') \bigcirc A(\theta_x, \theta_y) A^*(\theta_x', \theta_y') \tag{19}$$

其中

$$\tilde{\mu}(\theta_x, \theta_y, \theta_x', \theta_y') = \int \mu(x_1, y_1, x_2, y_2) \times \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(\theta_x \cdot x_1 + \theta_y \cdot y_1 - \theta_x' \cdot x_2 - \theta_y' \cdot y_2)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2 \tag{20}$$

$$A(\theta_x, \theta_y) = \int |u(x_1, y_1)| \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(\theta_x \cdot x_1 + \theta_y \cdot y_1)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{21}$$

即 $A(\theta_x \cdot \theta_y)$ 为平面波 $|u(x_1,y_1)|$ 的角谱分布。

将(19)式代入(17)式。经过变换可以证明,当 $x,y \to \infty$ 时如果 $J_{12} \to 0$,则有

$$\theta_x^2 = \theta_{ox}^2 + \Delta\theta^2 \tag{22}$$

其中

$$\theta_{ox}^2 = \int \theta_x^2 A(\theta_x, \theta_y) A^*(\theta_x, \theta_y)\mathrm{d}\theta_x\mathrm{d}\theta_y \tag{23}$$

$$\Delta\theta^2 = \int \theta_x^2 \cdot \tilde{\mu}(\theta_x, \theta_y, \theta_x', \theta_y')\mathrm{d}\theta_x\mathrm{d}\theta_y \tag{24}$$

至此,我们证明了任意部分相干光束的发散角可以表示为两部分的和,其中第一部分为一与该部分相干光束具有相同的振幅空间分布的平面波完全相干光的发散角,而另一部分则为由于部分相干性而引起的增量。

由此可见,部分相干光的发散角总是比具有相同空间振幅分布的平面波完全相干光束要大。故在所有具有相同的空间振幅强度分布的光束中,平面波完全相干光束具有最小的 M^2 值。

关于部分相干性的影响,我们还可以从高斯-谢尔模型光束中看得更清楚。根据文献[5],高斯-谢尔模型光束的远场发散角为:

$$\theta' = \frac{\lambda}{\pi\omega_0}\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0'}{\sigma_0}\right)^2} \tag{25}$$

其中 ω_0' 为光腰半径,σ_0 为相干长度,是光束相干性的量度,由此可见高斯-谢尔模型光束的远场发散角恰恰就是由两部分组成,其中一部分为完全相干光决定,而另一部分则由相干性的量度 σ_0 所决定。

7 波前畸变光束的 M^2 值

前面已证明基模高斯光束具有最小的 M^2 值,理想的基模高斯光束具有球面波前,但实际的光束往往由于谐振腔或传输光路上的光学元件的缺陷或像差的影响而形成波前畸变,这种波前畸变将影响光束的 M^2 值。

M. 玻恩和 E. 沃耳夫[6]求得像点强度与光束波阵面平均形变之间的关系为

$$I(p) \propto 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2(\Delta\Phi_p)^2$$

其中 Φ_p 为波前畸变,$\Delta\Phi_p$ 为波前的"均方畸变"

$$(\Delta\Phi_p)^2 = \frac{\iint (\Phi_p - \overline{\Phi}_p)^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$\overline{\Phi}_r = \iint \Phi_r \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big/ \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分限为出瞳面积。

实际上像点强度反比于光束的可聚焦度，而 M^2 值正比于光束的可聚焦度，因此可知

$$M^2 \propto \left[1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\Delta\Phi)^2\right]^{-1}$$

可以证明对一个波前畸变不大的平面波

$$U(x,\ y) = |U(x,y)| \exp[i\Phi_r]$$

有

$$M^2 = M_0^2\left[1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\Delta\Phi_r)^2\right]^{-1} \approx M_0^2\left[1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\Delta\Phi_r)^2\right]$$

其中 M_0^2 为平面波 $|U(x,y)|$ 的 M^2 值。由此可见波前畸变的存在将使平面波的 M^2 值增大，这与相干性降低对光束的 M^2 值影响很相似。

8　结　论

本文证明了 M^2 值的最小值为 1，基模高斯光束具有最小的 M^2 值。多模部分相干和波前畸变都是增大 M^2 值的因素。由此可见对于一个激光器来说，要提高其输出光束的质量，不但要减少其模式数目，提高相干性，还必须保证光束的波前不畸变。如果光束的波前发生畸变，则单模完全相干激光的 M^2 值并不一定比多模部分相干激光束的 M^2 值小，这一点在设计高质量激光器时必须充分考虑。

参　考　文　献

1　International Organization for Standardization, Terminology and test methods for lasers, ISO/TC 172/SC 9/WG 1 N14

2　陈培锋，丘军林．激光模式间的空间相干性分析．待发表

3　吕百达，张　彬　蔡邦维．M^2 因子概念和激光光束质量控制．*激光技术*，1992，**16**(5)：278

4　陈培锋，丘军林．部分相干光束 M^2 参数．待发表

5　J. Turunen, A. T. Friberg. Matrix representation of Gaussian Schell-model beams in Optical systems. *Opt. & laser Tech.*, 1986, **18**(5)：257～269

6　M. 玻恩，E. 沃耳夫．光学原理．北京：科学出版社，1981．605～610

The Comparison of the Propagation Factor M^2 of Various Practical Light Beams

Chen Peifeng　Qiu Junlin

(*Laser Institute of Huazhong University of Science and Technology*, *Wuhan* 430074)

Abstract　It has been proved that the TEM_{00} beam has the minimum propagation factor M^2. The specificities of the propagation factor M^2 of the Multi-modes laser beam, partially coherent beam and wave-front distorted beam are discussed and compared.

Key words　propagation factor M^2