第22卷 第10期
1995年10月

中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS

Vol. A22, No. 10
October, 1995

新型 Wiggler 自由电子激光器的变参数理论

程 亚 陈建文 朱佩平 肖体乔 寇雷刚

(中国科学院上海光机所，上海 201800)

提要 研究了参数可变情况下的新型 Wiggler 自由电子激光器的增益线型，在小信号条件下给出了增益的解析表达式，从而得到了不同参数条件增益曲线的变化情况，指出了影响增益的最重要的三个因素。

关键词 自由电子激光器，变参数

1 引 言

近年来，对自由电子激光理论的研究一直吸引着国内外众多学者。新构想新方案屡有见世。其中，以色列学者 Sholmo Pinhas 提出的新型磁场装置[1]以其结构简单引起了国内外学者的关注[2]。由于该磁场强度沿纵向无变化而不同于以往的周期摇摆器磁场，我们称之为“新型 Wiggler 磁场”。Pinhas 还研究了由该磁场结构得到的自由电子激光的小信号增益[3]。有趣的是，与常参数摇摆器自由电子激光器相比，此增益表达式具有完全相同的函数形式。众所周知，常参数摇摆器自由电子激光器的效率很低，约为 $1/2N$，N 为摇摆器周期数。只有采用可变参数摇摆器才能提高增益并延长增益饱和点，从而提高输出效率。但是以往的变参数理论 (KMR) 因属自洽非线性理论而难以得到解析表达式，一般是用计算机数值计算。本文则研究了这种特殊的新型磁场结构，得到了参数可变情况下其增益的解析表达式，并通过计算机作图与常参数情况作了比较。

2 Pinhas 的磁场结构及增益计算

该磁场由下述二维电流密度分布产生

$$J(x,y)=\begin{cases}-\hat{z}K\delta(x) & |y|>R\\ 0 & |y|<R\end{cases} \tag{1}$$

当 $x\ll R$ 时，xz 平面上的磁场近似为

$$B(x)\simeq-\hat{y}\,\frac{4Kx}{cR} \tag{2}$$

其中 K 为电流密度，R 是平行平板间距，c 是光速。此磁场横向恰为谐振子场。电子在 xz 平面上的运动轨迹近似为一条余弦曲线。即

收稿日期：1994年12月29日；收到修改稿日期：1995年3月7日

$$v_x = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) \tag{3}$$

$$v_z = v_{/\!/} + \frac{\omega_0^2 x_0^2 \cos(2\omega_0 t)}{4 v_{/\!/}} \tag{4}$$

$$\omega_0 = 2\left(\frac{e v_{/\!/} K}{m\gamma c^2 R}\right)^{1/2} \tag{5}$$

x_0是电子初始位置，e，m是电子电量及质量，γ是电子相对论能量因子。$v_{/\!/}$是电子的纵向初始速度。(4)式中右边第二项在计算增益被略去。原因正如文献[3]中已指出，当满足条件$\frac{k_r \omega_0 x_0^2}{8 v_{/\!/}} \ll 1$时，相比第一项它是一小量。其中$k_r$即下文所用光波波矢。最后，Pinhas给出增益表达式[3]

$$G(t) \propto 1 - \cos(\Delta\omega t) - (\Delta\omega t/2)\sin(\Delta\omega t) \tag{6}$$

其中，$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_s/2\gamma^2$，为失谐量。$\omega_s$是辐射场频率。

3 参数可变时的增益计算

本文研究的变参数情况对应的装置如图1。其电流密度分布函数为

$$J'(x,y,z) = \begin{cases} -(\hat{z}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta)K\delta(x) & y > y_0/\cos\theta + z\tan\theta \\ -(\hat{z}\cos\theta - \hat{y}\sin\theta)K\delta(x) & y < -(y_0/\cos\theta + z\tan\theta) \\ 0 & |y| < y_0\cos\theta + z\tan\theta \end{cases} \tag{7}$$

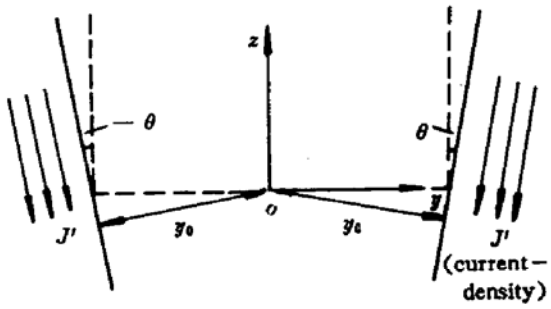

Fig. 1 The current-density distribution of a novel variable parameter Wiggler

θ角，y_0如图所标。相应的磁场分布函数为

$$\boldsymbol{B}(x) \simeq -\hat{y}\frac{4Kx}{c(y_0 + z\sin\theta)} \tag{8}$$

由此得到电子的运动方程

$$\dot{v}_x = -\frac{4Kev_z x}{m\gamma c^2(y_0 + z\sin\theta)} \tag{9}$$

$$\dot{v}_z = -\frac{4Kev_x x}{m\gamma c^2(y_0 + z\sin\theta)} \tag{10}$$

令

$$\mu = \frac{v_{/\!/}\sin\theta}{2y_0} \tag{11}$$

近似将v_z视为常量$v_{/\!/}$，可得到电子横向运动方程

$$\dot{v}_x = -\frac{\omega^2 x}{1 + \mu t} \tag{12}$$

其中

$$\omega^2 = \frac{4Kev_{/\!/}}{m\gamma c^2 y_0} \tag{13}$$

考虑μ很小的情况（当μ较大时，增益线型将变坏。最后的结果也证实这一点），(12)式两边求导，精确到μ的一阶项，得到的电子速度方程及电子速度为

$$\ddot{v}_x + 2\mu\dot{v}_x + \omega^2 v_x = -2\omega^3 x_0 \mu t \sin(\omega t) \tag{14}$$

$$v_x = -\omega x_0 \exp(\mu t)[\sin(\omega' t) - (\mu\omega' t^2/2)\cos(\omega' t)] \tag{15}$$

及

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} \simeq \omega \tag{16}$$

其中用到初始时刻$v_x = 0$的条件。电子的能量方程为

$$\dot{\gamma}=\frac{e}{mc^2}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{E}_r \tag{17}$$

设 E_r 是沿 z 轴传播的线偏振光，偏振方向沿 x。上式可写为

$$\dot{\gamma}=\frac{evE_r}{mc^2}\cos(k_rz-\omega_rt+\phi_0) \tag{18}$$

此处下标 r 代表光场。ϕ_0 是电子在光场中的初始位相，为一随机数。利用近似[4]

$$z\simeq v_{/\!/}t-\int\frac{c\delta\gamma}{\gamma_0^3}\mathrm{d}t \tag{19}$$

其中
$$\delta\gamma=\gamma(t)-\gamma_0 \tag{20}$$

γ_0 为电子初始相对论能量因子。上式略去积分常数。对辐射场采用小信号近似。将(19)，(20)式代入(18)式，展开至 $\delta\gamma$ 一阶项，两边积分，得

$$\delta\gamma=\frac{eE_r}{mc^2}\int_0^t v_x\left\{\cos(k_rv_{/\!/}t-\omega_rt+\phi_0)+\sin(k_rv_{/\!/}t-\omega_rt+\phi_0)\int\frac{\omega_r\delta\gamma}{\gamma_0^3}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}t \tag{21}$$

将 $\delta\gamma$ 展开成 E_r 的级数求解上式，再对 ϕ_0 取平均[4]。经过冗长的计算，并照文献[3]略去非谐振项，得到增益解析式

$$\begin{aligned}
G(t)&=\frac{\rho_emc^2}{\varepsilon_0E_r^2}\langle\delta\gamma\rangle_{\phi_0}\\
&=M\Big\{\frac{WPH^2}{4F^{3/2}}[2QP^{-1}\cos(b_3)+P^{-2}\cos(b_3)+2QI^{-1/2}\cos(Q-b_3+b_5)+2I^{-1}\cos(Q-b_3+b_6)\\
&\quad+3P^{-1}F^{-1/2}\cos(b_4)-6F^{-1}H^{-1}\cos(Q-b_4+b_2)]+\frac{1}{8}P^{-1}F^{-1}(H^2-1)\sin(b_1)\\
&\quad+\frac{1}{4}HF^{-2}[P\sin(Q-b_1)+\cos(Q-b_1)-QF\sin(Q)-F^{1/2}\sin(Q+b_2)]\\
&\quad-\frac{1}{4}F^{-2}[P\sin(b_1)+\cos(b_1)-1]-\frac{WP}{4F^{3/2}}[H(2Q^2\cos(Q-b_1+b_2)-2QF^{-1/2}\cos(Q)\\
&\quad-2F^{-1}\cos(Q-b_1+b_3)Q^3F^{-1/2}\cos(Q)+Q^3F^{-1/2}\cos(Q)+6QF^{-1/2}\cos(Q-b_2+b_3)\\
&\quad+6F^{-1}\cos(Q-b_2+b_4)+2F^{-1}\cos(b_3-b_1)-6F^{-1}\cos(b_2-b_4)-P^{-2}\cos(b_3)\\
&\quad-2I^{-1}\cos(b_3-b_6)-3P^{-1}F^{-1/2}\cos(b_4)+6F^{-1}\cos(b_2-b_4))]\\
&\quad-\frac{WP}{2F}\Big[\frac{WH^2\sin(b_1)}{16}(2Q^4+4Q^3P^{-1}+6Q^2P^{-2}+6QP^{-3}+3P^{-4}-3P^{-4}H^{-2})\\
&\quad+\frac{WH^2\sin(b_3)}{8F^{1/2}}(4Q^3+6Q^2P^{-1}+6QP^{-2}+3P^{-3}-3P^{-3}H^{-2})\Big]\\
&\quad-\frac{W^2P^2H^2}{4F^{3/2}}[Q^3I^{-1/2}\sin(Q-b_3+b_5)+3Q^2I^{-1}\sin(Q-b_3+b_6)\\
&\quad+6QI^{-3/2}\sin(Q-b_3+b_7)+6I^{-2}\sin(Q-b_3+b_8)-6H^{-2}I^{-2}\sin(b_8-b_3)]\\
&\quad+\frac{3W^2PH^2\sin(b_4)}{16F^2}(2Q^2+2QP^{-1}+P^{-2}-P^{-2}H^{-2})\\
&\quad+\frac{3W^2P^2H}{4F^3}[Q^2F^{1/2}\sin(Q-b_4+b_2)+2Q\sin(Q-b_4+b_1)\\
&\quad+2F^{-1/2}\sin(Q-b_4+b_3)+2F^{-1/2}H^{-1}\sin(b_4-b_3)]\Big\}
\end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$M = \frac{\rho_e m\omega_r c^2 \omega'^2 x_0^2}{2\varepsilon_0 \gamma_0^3 \Delta\omega'^3} \tag{23}$$

$$W = \frac{\omega'}{\Delta\omega'},\ P = \frac{\mu}{\Delta\omega'},\ Q = \Delta\omega' t,\ F = P^2 + 1,\ I = 4P^2 + 1,\ H = \exp(-PQ) \tag{24}$$

ρ_e 是电子密度。另有

$$\begin{aligned}
\cos(b_1) &= \frac{P^2 - 1}{P^2 + 1}, & \sin(b_1) &= \frac{2P}{P^2 + 1} \\
\cos(b_2) &= \frac{P}{(P^2 + 1)^{1/2}}, & \sin(b_2) &= \frac{1}{(P^2 + 1)^{1/2}} \\
\cos(b_3) &= \frac{P^3 - 3P}{(P^2 + 1)^{3/2}}, & \sin(b_3) &= \frac{3P^2 - 1}{(P^2 + 1)^{3/2}} \\
\cos(b_4) &= \frac{P^4 - 6P^2 + 1}{(P^2 + 1)^2}, & \sin(b_4) &= \frac{4P^3 - 4P}{(P^2 + 1)^2} \\
\cos(b_5) &= \frac{2P}{(4P^2 + 1)^{1/2}}, & \sin(b_5) &= \frac{1}{(4P^2 + 1)^{1/2}} \\
\cos(b_6) &= \frac{4P^2 - 1}{4P^2 + 1}, & \sin(b_6) &= \frac{4P}{4P^2 + 1} \\
\cos(b_7) &= \frac{8P^3 - 6P}{(4P^2 + 1)^{3/2}}, & \sin(b_7) &= \frac{12P^2 - 1}{(4P^2 + 1)^{3/2}} \\
\cos(b_8) &= \frac{16P^4 - 24P^2 + 1}{(4P^2 + 1)^2}, & \sin(b_8) &= \frac{32P^3 - 8P}{(4P^2 + 1)^2}
\end{aligned} \tag{25}$$

4　数值模拟及讨论

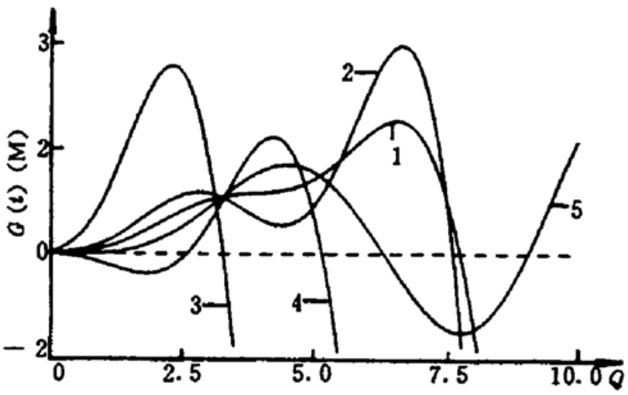

Fig. 2　The gain curves with different W and P. M is presented by eq. (22)

Curve1～4: $W = 100.000$; Curve1: $P = -0.0005$; Curve2: $P = -0.001$; Curve3: $P = -0.005$; Curve4: $P = 0.001$; Curve5: $W = 0.000$, $P = 0.000$

图 2 给出了数值模拟的曲线。曲线 1～4 对应的参数分别为 $W = 100.0$；$P = -0.0005$，-0.001，-0.005，0.001。曲线 5 则对应 $W = 0$，$P = 0$，为常参数时的曲线。显然，与曲线 5 相比，曲线 1,2 的饱和点(即零点) 大大延迟了。而曲线 2 的增益有一高峰，因而比曲线 1 更有利于提高效率，此时的参数最接近最佳工作点。相反，曲线 3，4 的饱和点则提前，尤其曲线 4，开始时增益即为负，更不可取。数值计算还表明，大的 W 有益于改善增益。限于篇幅，本文未给出参数 W 改变时的曲线对照。

(22) 式及数值结果有以下几点值得注意：

(1) 当参数 μ 趋向于零，(22) 式的极限即退化为常参数表达式。

(2) 增益线型仅与参数 W，P 和 Q 有关。虽然此结论来自于特殊的磁场结构，但可望对一般摇摆器情况有所启发。

(3) 数值模拟表明当 θ 角为一适当小的负数时，增益有最佳线型。

(4) 从电子的轨迹方程看，当 θ 角为负数时，此磁场结构相当于一个磁场强度逐渐增大，周期逐渐缩短的常规摇摆器磁场。现有的变参数理论指出，这两种变化前者对增益不利而后者有益[5]。现在两种因素同时起作用，但是后者的影响占主要地位，因而最终改善了增益线型。

5 结　论

本文得到了变参数新型 Wiggler 自由电子激光器的增益解析表达式，并用数值方法估算了可变角 θ 的最佳工作点。由于这种新型自由电子激光器结构很简单，其应用前景非常乐观。本文为今后的实验工作提供了理论依据，部分结果对其他类型的变参数自由电子激光器也有参考价值。

参 考 文 献

1 Shlomo Pinhas. Proposal for a Novel Wiggler. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1990, QE-26(8): 1332～1334

2 祝家清，文双春．电子在磁场与纵向坐标无关的摆动器中的辐射谱分布．*中国激光*，1994，A21(9)：693～698

3 Shlomo Pinhas. Proposal for Novel FEL Operation. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1992, QE-28(11): 2567～2572

4 陈建文，张大可，雷仕湛 等．自由电子激光器的能量模型．*中国激光*，1985，13(7)：385～391

5 张世昌．自由电子激光导论，成都：西南交通大学出版社，1993. 85

Theoretical Analysis of Variable Parameter Free Electron Laser with a Novel Wiggler

Cheng Ya　Chen Jianwen　Zhu Peiping　Xiao Tiqiao　Kou Leigang

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai* 201800)

Abstract　This paper gives an analytic gain formula of variable parameter FEL with a novel Wiggler which was proposed by Shlomo Pinhas. The result provides a theoretical basis for studying how the gain curve of this new type of free electron laser is changed when the variable parameter changes.

Key words　free electron laser, variable parameter theory