

# 用 Radon 变换迭代法重建含有遮挡物的 三维折射率场

高益庆

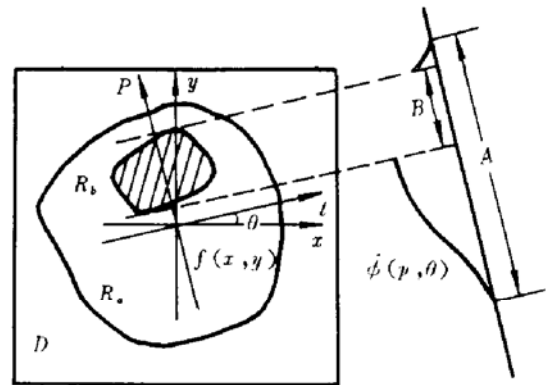
(南昌航空工业学院物理教研室, 南昌 330034)

**提要** 通过计算机模拟研究,考查了 Radon 变换迭代法用于光学干涉层析计量含有遮挡物三维折射率场的重建精度。作为一个应用实例,计算了某一截面的气体温度分布,并与热电偶测量的值进行了比较。

**关键词** 干涉层析术,重建算法,像重建

## 1 Radon 变换迭代算法

假定某一截面上的折射率差为  $f(x, y) = n - n_0$ ,  $n_0$  为环境气体折射率,  $n(x, y)$  为待测气体的折射率分布,其分布区域为  $R_s$  (如图 1), 遮挡物的区域为  $R_o$ 。由于部分光线被阻挡,使得光程差数据  $\phi(p, \theta)$  部分丢失 (图 1 中在  $A$  上丢失  $B$  部分)。于是由 Radon 逆变换得出的折射率必然与待测值相差甚远。



由光程差重建折射率差场涉及到两个空间:

待测场空间  $(x, y)$  及其 Radon 变换空间  $(p, \theta)$ 。Fig. 1 A refractive index field and optical pathlength

Radon 变换迭代法的思路是从 Radon 变换空间到场空间反复迭代,并分别满足两个空间的物理限制。其实施步骤如下:

### 1.1 选择场的初始估计 $f^0(x, y)$

方法 1: 如果我们对待测场较熟悉,对遮挡物的位置、场边界形状、场的分布趋势有大致了解,就可直接选择它们的某种分布作为  $f^0(x, y)$ 。

方法 2: 如果干涉条纹图比较规则,就可根据条纹的走向,修补被遮挡的条纹,从而估计出失去的数据,连同已知的数据一起,通过卷积反投影算法重建,再经过场空间修正得出  $f^0(x, y)$ 。

方法 3: 如果以上两种选择都不适宜,则可由已知的数据估算出丢失的数据  $\phi_o$ 。注意到图 1 所示的坐标关系,并且为方便起见,设待测场具有半径为  $R$  的圆边界,不难得出

$$\hat{\phi}_u(p, \theta) = 2(R^2 - p^2)^{1/2} \hat{\phi}_c(p, \theta) + \int_{\substack{\pi/2 \\ \theta \neq \theta'}}^{\pi/2} \frac{d\theta'}{\sin(\theta - \theta')} \int_{l_2}^{l_1} \hat{\phi}_c(p', \theta') dp' \quad (1)$$

式中,  $\hat{\phi}_c(p, \theta) = \hat{\phi}(p, \theta) * J_1^{-1}|w|$ ,  $J_1^{-1}$  为一维逆傅里叶变换,  $*$  表示一维卷积,  $l_1 = p \cos(\theta - \theta') - (R^2 - p^2)^{1/2} \sin(\theta - \theta')$ ,  $l_2 = p \cos(\theta - \theta') + (R^2 - p^2)^{1/2} \sin(\theta - \theta')$ , 然后再同方法 2 一样计算初始估计  $f_0^c(x, y)$ 。

### 1.2 通过场的估计计算未遮挡部分的光程差

$$\phi_i^c(p, \theta) = \int_t f_i^c(x, y) dt \quad (p, \theta) \in A \cap \bar{B} \quad (2)$$

### 1.3 计算差分场的光程差

$$\phi_i^d(p, \theta) = \hat{\phi}(p, \theta) - \phi_i^c(p, \theta) \quad (p, \theta) \in A \cap \bar{B} \quad (3)$$

### 1.4 用卷积反投影算法重建差分场

$$f_i^d(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi_i^d * J_1^{-1}|w| d\theta \quad (x, y) \in D \quad (4)$$

### 1.5 场空间修正

$$\hat{f}(x, y) = f_i^d(x, y) + f_i^c(x, y) \quad (x, y) \in D \quad (5)$$

这里我们可以结合更多的折射率场空间的物理限制, 比如, 在折射率差场外, 折射率差值为零, 在场区内, 折射率差值不小于零〔若为气体或液体温度场, 一般有  $n_0 - n(x, y) \geq 0$ 〕等。进行修正, 进一步改进对原场的估计:

$$f_i^{*1}(x, y) = \begin{cases} \hat{f}(x, y) & \text{若 } \hat{f}(x, y) \geq 0 \text{ 且 } (x, y) \in R_a \cap \bar{R}_b \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (6)$$

### 1.6 迭代终止判据为

$$\varepsilon^{i-1} - \varepsilon^i < \varepsilon$$

式中

$$\varepsilon^i = \frac{\left\{ \iint [\phi_i^d(p, \theta)]^2 dp d\theta \right\}^{1/2}}{\left\{ \iint [\hat{\phi}(p, \theta)]^2 dp d\theta \right\}^{1/2}} \quad (7)$$

则停止迭代,  $f_i^{*1}$  作为重建结果。否则回到第(1.2)步。 $\varepsilon$  为预先给定的小数。

## 2 计算机模拟运算

采用下式作为模拟的气体温度场

$$T(x, y) = \begin{cases} \text{遮挡物} & x^2 + (y \pm 0.22)^2 \leq 0.1^2 \\ T_0 & x^2 + y^2 \geq 0.5^2 \\ T_0 + T_1 e^{-8x^2 - 25(y+0.22)^2} + T_2 e^{-8x^2 - 25(y-0.22)^2} & \text{场中其他处} \end{cases}$$

通过气体温度和折射率转换关系获得折射率差

$$f(x, y) = \left[ 1 - \frac{T_0}{T(x, y)} \right] (n_0 - 1) \quad (8)$$

式中  $T_0$  和  $n_0$  为环境空气温度和折射率。通过泊松数值积分得到模拟的光程差数据  $\hat{\phi}(p_i, \theta_j)$ , 由于遮挡物的存在, 使得近 40% 的数据丢失。

根据采样定理, Radon 变换空间  $(p, \theta)$  径向采样间隔  $d$  要满足 Nyquist 条件, 但由于  $f(x, y)$  在空间是个限域函数, 故其频谱不可能是限带的。实际上常将  $d$  取得比干涉条纹图中最小条纹间隔小。这样就可先定出径向采样点数  $I$

$$d = 2R/(I - 1) \quad (9)$$

根据文献[1],  $I$  与观察方向数  $J$  应满足

$$J = (\pi/2)(I - 1) - 3 \quad (10)$$

从而可定出角度采样间隔

$$\Delta = \pi/J \quad (11)$$

模拟运算中  $I$  取 25 ( $i = I_1, I_1 - 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, I_2 - 1, I_2$ ),  $J$  取 37 ( $j = J_1, J_1 - 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, J_2 - 1, J_2$ )。场空间采样间隔  $\Delta x$  和  $\Delta y$ , 有  $M \times N = 29 \times 29$  个重建值。

方法 3 中失去的光程差数据由(1)式估算, 其迭代式为

$$\hat{\phi}_i^{K+1}(p_i, \theta_j) = 2\Delta(R^2 - p_i)^{1/2} \hat{\phi}_i^K(p_i, \theta_j) + d\Delta \sum_{\substack{j'=J_1 \\ j' \neq j}}^{J_2} \sum_{\substack{i'=N_1 \\ i' \neq i}}^{N_2} \frac{\phi_c^K(p_{i'}, \theta_{j'})}{\sin(\theta_j - \theta_{j'})} + \delta\phi_1 + \delta\phi_2 \quad (12)$$

式中  $N_1$  和  $N_2$  是  $l_1/d = [p_i \cos(\theta_j - \theta_{j'}) - \sqrt{R^2 - p_i^2} \sin(\theta_j - \theta_{j'})]/d$  和  $l_2/d = [p_i \cos(\theta_j - \theta_{j'}) + \sqrt{R^2 - p_i^2} \sin(\theta_j - \theta_{j'})]/d$  舍入到紧邻的整数,  $\delta\phi_1$  和  $\delta\phi_2$  是由剩余非整数部分贡献的:

$$\delta\phi_1 = d\Delta \sum_{\substack{j'=J_1 \\ j' \neq j}}^{J_2} \frac{N_1 - l_1/d}{\sin(\theta_j - \theta_{j'})} \phi_c^K(N_1 d, \theta_{j'}) \quad (13)$$

$$\delta\phi_2 = d\Delta \sum_{\substack{j'=J_1 \\ j' \neq j}}^{J_2} \frac{N_2 - l_2/d}{\sin(\theta_j - \theta_{j'})} \phi_c^K(N_2 d, \theta_{j'}) \quad (14)$$

第(1.2)步中(2)式的计算是通过把探测光线与场空间某像素之交点的值用其紧邻两点的值经线性内插法求得的。对于探测光线  $t(p_i, \theta_j)$ , 当  $0 \leq |\text{tg}\theta_j| \leq \Delta y/\Delta x$ , 该光线与像素  $(x_m, y_n)$  交点的  $y$  坐标为  $y = x_m \text{tg}\theta_j + p_i/\cos\theta_j$ , 该像素的值为

$$f_c(x_m, y) = f_c(x_m, y_n) + \frac{y - y_n}{\Delta y} [f_c(x_m, y_{n+1}) - f_c(x_m, y_n)] \quad (15)$$

该光线的光程差为

$$\phi_c^i(p_i, \theta_j) = \frac{\Delta x}{|\cos\theta_j|} \sum_m f_c(x_m, y) \quad (16)$$

当  $|\text{tg}\theta_j| > \Delta y/\Delta x$ , 该光线与像素  $(x_m, y_n)$  的交点  $x$  坐标为  $x = y_n \text{ctg}\theta_j - p_i/\sin\theta_j$ , 相应地有

$$f_c(x, y_n) = f_c(x_m, y_n) + \frac{x - x_m}{\Delta x} [f_c(x_{m+1}, y_n) - f_c(x_m, y_n)] \quad (17)$$

$$\phi_c^i(p_i, \theta_j) = \frac{\Delta y}{|\sin\theta_j|} \sum_n f_c(x, y_n) \quad (18)$$

卷积反投影算法采用线性内插

$$f_i(x_m, y_n) = d\Delta \sum_j \phi_c^i[-x_m \sin(j\Delta) + y_n \cos(j\Delta), j\Delta] \quad (19)$$

$$\phi_c^i(id, j\Delta) = \sum_l \phi_c^i[(i-l)d, j\Delta] h_o(ld) \quad (20)$$

式中  $h_o$  为广义汉明滤波窗函数

$$h_s(ld) = \sum_K q[(l-K)d]h(Kd) \quad (21)$$

$$q(nd) = \begin{cases} \frac{1}{4d^2} & n=0 \\ 0 & n=\text{偶数} \\ -\frac{1}{n^2\pi^2d^2} & n=\text{奇数} \end{cases} \quad (22)$$

$$h(nd) = \begin{cases} a & n=0 \\ (1-a)/2 & n=\pm 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (23)$$

对于理想数据,取  $a=1$ ,即为  $R-L$  滤波;对于噪声较大数据,取  $0.5 < a < 1$ 。

重建结果的平均相对误差和最大相对误差分别为

$$T_{er} = \sum_m \sum_n |T_{mn} - \hat{T}_{mn}| / (T_2 \times M \times N) \quad (24)$$

$$T_{erm} = |T_{mn} - \hat{T}_{mn}|_{\max} / T_2 \quad (25)$$

式中  $T$  为原始温度,  $\hat{T}$  为重建的温度,即由重建的  $f_s^{+1}$  通过(8)式转换成温度。

图 2 和图 3 是总观察角为  $180^\circ$  时三种方法对模拟温度场重建结果的平均相对误差和最大相对误差的比较。

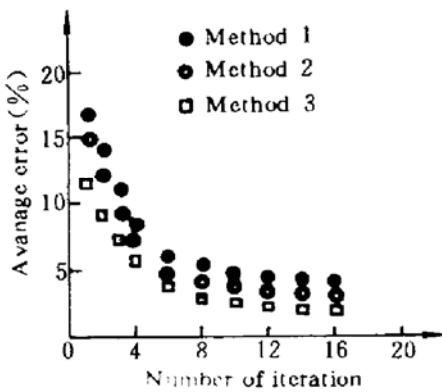


Fig. 2 Iterative reduction of average errors

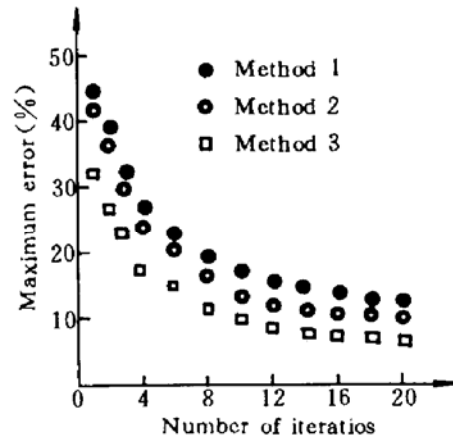


Fig. 3 Iterative reduction of Maximum errors

采用方法 1,初始估计越准确,则收敛速度越快,精度越好。图中对模拟温度场的初始估计为

$$T_s^0 = \begin{cases} \text{遮挡物} & x^2 + (y \pm 0.22)^2 \leq 0.1^2 \\ T_0 & x^2 + y^2 \geq 0.5^2 \\ T_0 + e^{-(y+0.22)^2} + e^{-(y-0.22)^2} & \text{场中其他处} \end{cases} \quad (26)$$

采用方法 2,因模拟运算未涉及到干涉条纹图,故仅根据光程差数据的分布趋势来修补被遮挡物挡住的数据。采用方法 3,利用(12)式估算丢失的数据,图中只进行了 3 次迭代,从而得到初始估计。图 2 和图 3 的模拟运算中取  $a=1$ 。

为了比较观察角的影响,用三种方法比较了  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  和  $180^\circ$  的重建结果。观察角范围越

大,则收敛速度越快,且重建精度越好,但观察角小于 90°时,重建效果较差。

为了考查噪声的影响,取条纹截断误差  $\delta$  为 0.05 级和 0.5 级的数据( $\phi_{i,j} = \lambda N_{i,j}$ ,  $\lambda$  为探测光波长,  $N_{i,j}$  为条纹级数;模拟运算中最大条纹级数为 9 级)对三种方法进行了比较(总观察角为 90°,取  $a = 1$ )。结果表明,当条纹截断误差为 0.5 级时,三种方法迭代均发散。图 4 是用方法 1 迭代的结果,其他两种方法趋势相同。

为了抑制噪声的影响,在(23)式中取  $a = 0.8$  对条纹截断误差为 0.5 级、总观察角为 90°的数据进行模拟运算。结果表明,三种方法对噪声的敏感性都得到了改善。图 5 是使用方法 1 的迭代结果,其他两种方法趋势相同。

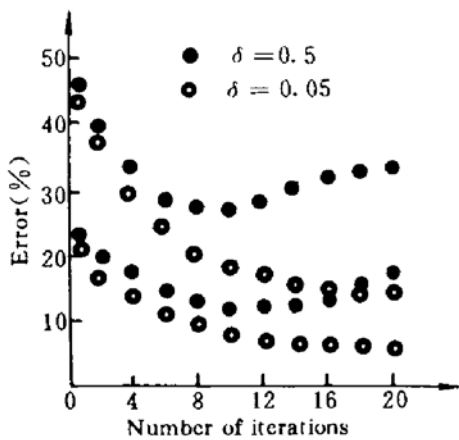


Fig. 4 The influence of fringe roundoff error  $\delta$  on reconstruction precision

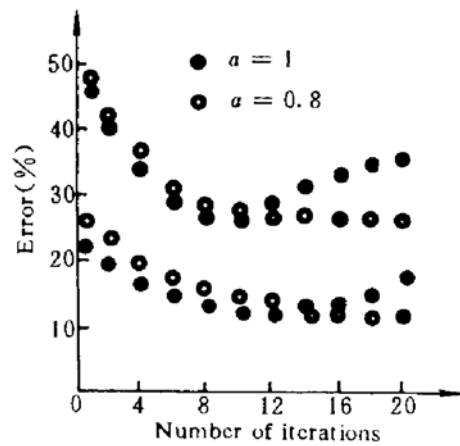


Fig. 5 The results of compressing noise ( $\delta = 0.5$ )

### 3 测量温度场应用实例

作为一个应用实例,用双照明光双参考光对称光路系统<sup>[2]</sup>获得热气温度场的实测干涉数据。该温度场是由两个外套铜柱的电热丝产生的具有双峰函数结构的热空气温度场,两铜柱外围直径均为 1 cm,中心相距 1.8 cm。采用两次曝光技术,在一块干板上记录了 90°视角范围内的干涉条纹图,考虑到该温度场的对称性,90°视角的数据便扩充为 180°视角的干涉数据。用三种方法重建铜柱一半高处水平截面的温度场。由于两铜柱的遮挡,使得部分条纹数据丢失。在使用方法 1 时,选择温度场的初始估计为

$$T_0^0 = \begin{cases} \text{铜柱截面} & x^2 + (y \pm 0.9)^2 \leq 0.5^2 \\ T_0 & x^2 + y^2 \geq 2.5^2 \\ T_0 + 10e^{-8x^2 - 25(y-0.9)^2} + 10e^{-8x^2 - 25(y+0.9)^2} & \text{场中其他处} \end{cases} \quad (27)$$

$y$  为两加热铜柱截面轴心的连线方向,两轴心的中点为坐标原点,  $T_0$  为室温(293 K),通过温度与折射率关系转换为  $f^0$ 。在使用方法 2 时,是在干涉条纹图上直接进行修补。使用方法 3 时,是通过实测的条纹数据经过三次迭代得出遮挡的条纹数据,从而计算初始估计  $f^0$ 。滤波窗函数中的  $a$  取为 0.8。作为一个比较,用热电偶直接测量了加热铜柱截面轴心连线上的几点温度值,与三种方法重建结果基本符合(见表 1)。

Table 1 Comparison of thermocouple measurements with the reconstruction results ( $^{\circ}\text{C}$ )

$y(\text{mm})$ method	-24	-21	-18	-15	-3	0	3	15	18	21	24
Method 1	22	26	34	41	43	35	42	40	35	27	23
Method 2	23	27	32	35	37	29	38	37	32	26	22
Method 3	22	26	31	37	38	32	39	36	30	24	21
Thermocouple	20	24	32	39	41	34	40	38	31	25	20

## 参 考 文 献

- 1 C. M. Vest, I. Prikryl. Tomography by iterative convolution; empirical study and application to interferometry. *Appl. Opt.*, 1984, 23(14): 2433
- 2 高益庆, 康琦, 丁汉泉. 一种大视角重建折射率场的简易方法. *光学学报*, 1988, 8(2): 181

## Reconstruction of 3-D Refractive Index Fields with an Opaque Object by Radon Transform Iteration

Gao Yiqing

(Nanchang College of Aeronautical Engineering, Nanchang 330034)

**Abstract** In this paper, the reconstruction precision of Radon transform iteration, which is used in interferometric tomography for 3-D refractive index fields with an opaque object, has been studied by computer simulation. As an example, the method has been used to reconstruct the hot gas temperature fields, and the results are compared with thermocouple measurements.

**Key words** optical tomography, reconstructing algorithm, image reconstruction