第 21 卷 第 9 期　　中 国 激 光　　Vol. A21, No. 9
1994 年 9 月　　CHINESE JOURNAL OF LASERS　　September, 1994

电子在磁场与纵向坐标无关的摆动器中的辐射谱分布

祝家清　文双春
(华中师范大学物理系，武汉 430070)

提要　应用 Madey 定理计算了电子在 Shlomo Pinhas 提出的一种磁场与纵向坐标无关的摆动器中自发辐射谱分布，并将所得到的结果与利用线性摆动器时产生的辐射谱进行了比较，发现它们有相同的形式。初步论证了利用该摆动器产生高次谐波相干辐射的可能性。

关键词　自由电子激光器，摆动器，谱分布

1 引 言

自由电子激光器是一种全新的相干光源。它们利用一种简单的增益介质——在磁场中的一束相对论性电子，已经显示出了宽阔的波长调谐性和优良的光束质量。所以自从 70 年代中期 Madey[1] 等人首次获得自由电子相干辐射以来，许多国家都投入了大量的人力和财力进行自由电子激光器理论和实验研究。在它的发展过程中，不断地出现新思想、新概念。就摆动器而言，从参数不变摆动器[2]到可变参数摆动器[3]，此后又有人提出双-双绕摆动器[4]、两维摆动器[5]等等。1991 年，以色列学者 Sholmo Pinhas 提出一种新的磁场结构[6]，严格地说，这种磁场结构不能叫作摆动器，因为它不具备通常意义上的摆动器那种空间周期性结构。然而，相对论性电子在该磁场中的轨道却呈现出波动形式[6]，Pinhas 还从理论上初步论证了利用这种磁场结构产生自由电子激光的可能性[7]。本文的目的主要是根据 Madey 定理计算电子在该磁场结构中的辐射谱分布，探讨获得高次谐波输出的可能性。

2 Madey 定理

Madey 利用量子力学方法推导出自发辐射和受激辐射的关系[8]，即 Madey 定理：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega}=\frac{m^2c\omega^2}{8\pi^2\varepsilon_0E_0^2}\langle\gamma_1^2\rangle \tag{1}$$

$$\langle\gamma_2\rangle=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma_0}\langle\gamma_1^2\rangle \tag{2}$$

式中 m 是电子质量，c 是光速，ε_0 是自由空间中的介电常数，E_0 是电场强度幅值，ω 是光辐射频率，γ_0 是电子初始相对论能量因子，γ_1、γ_2… 是借助于光场定标的一阶、二阶 …… 扰动量，(1) 式

收稿日期：1993 年 11 月 15 日；收到修改稿日期：1994 年 1 月 19 日

左边是单位频率单位立体角的辐射强度,〈 〉表示对电子所处的位相求平均。

实验已经证实了该定理在低增益、未饱和电子-光子相互作用以及平面波假设下是成立的[9],所以,在线性范围内它获得了广泛的应用[10,11]。

3 工作方程及基本计算

Pinhas 提出的摆动器磁场是由下述电流密度分布产生的:

$$\boldsymbol{J}(x,y)=\begin{cases}-\boldsymbol{e}_z K\delta(x) & |y|>R\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{3}$$

当 x 足够小时,在 xz 平面的磁场为

$$\boldsymbol{B}(x)\simeq-\boldsymbol{e}_y\frac{4K}{cR}x\equiv-\boldsymbol{e}_y Gx\tag{4}$$

式中 K、R、G 都是常数,c 是光速。电子在该磁场中的轨迹为

$$x=x_0\cos(\omega_0 t)\tag{5}$$

$$z=v_{11}t+\frac{\omega_0 x_0^2\sin(2\omega_0 t)}{8v_{11}}\tag{6}$$

速度为

$$v_x=-\omega_0 x_0\sin(\omega_0 t)\tag{7}$$

$$v_z=v_{11}+\frac{\omega_0^2 x_0^2\cos(2\omega_0 t)}{4v_{11}}\tag{8}$$

式中 x_0 是电子的初始横向位置,v_{11} 是平均纵向速度,ω_0 定义为

$$\omega_0\doteq\sqrt{\frac{ev_{11}G}{m\gamma c}}\tag{9}$$

将(5)~(8)式与普通自由电子激光器线性摆动器中的电子轨迹和速度[12]进行对比,我们可以发现,它们实质上是一样的,只是参数 ω_0 和 a_W 的表达式不同。我们所研究的这种摆动器的 a_W 为[6]

$$a_w=\gamma\omega_0 x_0/(\sqrt{2}\,v_{11})\tag{10}$$

这里,我们很容易得到电子在这种摆动器中的辐射频率(共振频率)[13]为

$$\omega_r=\omega_0/(1-\beta_z\cos\theta)\tag{11}$$

式中 $\beta_z=v_z/c$,v_z 是电子的纵向速度,θ 为观察方向与纵向坐标的夹角。

电子在与电磁波的互作用过程中满足

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{e}{mc}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}\tag{12}$$

在 (o,t) 上积分上式得

$$\gamma_{(t)}-\gamma_0=\frac{e}{mc}\int_0^t\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}t\tag{13}$$

在光场不太强的情况下,将上式展开成 $\boldsymbol{E}$ 的级数[8],其一阶扰动量为

$$\gamma_1=\frac{e}{mc^3}\int_0^t\boldsymbol{v}^0\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}t\tag{14}$$

$\boldsymbol{v}^0$ 为电子未受电磁波扰动时的速度,$\boldsymbol{E}$ 为平面偏振电磁波,我们设它为

$$E = E_0 \mathrm{Re}\exp[i(\omega_s t - K_s \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} + \Phi)] \tag{15}$$

式中 ω_s、K_s 分别是电磁波的频率和波数，Φ 是初位相。将上式代入(14) 式，得

$$\gamma_1 = \mathrm{Re}(\frac{e\,E_0}{m\,c^2}\cos\theta)\int_0^t v_x \exp[i(\omega_s t - K_s \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} + \Phi)] \tag{16}$$

由于相对论性电子在磁场中的辐射主要集中在前方的一个狭窄的锥角内[14]，该锥角的半角宽为 $\sim 1/\gamma$，将 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 展开，并略去二阶无穷小量，这样，在球坐标系中 $\boldsymbol{n}$ 可写为

$$\boldsymbol{n} = (\theta\cos\varphi, \theta\sin\varphi, 1 - \frac{1}{2}\theta^2) \tag{17}$$

利用(5)、(6)、(17)式，得

$$\omega_s t - K_s \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} \approx \frac{\omega_s}{\omega_r}[\omega_0 t - \alpha\cos\omega_0 t - \xi\sin(2\omega_0 t)] \tag{18}$$

式中

$$\alpha = \frac{\omega_0 x_0 \theta\cos\varphi}{c(1 - \beta_z\cos\theta)} \tag{19}$$

$$\xi = \frac{\omega_0^2 x_0^2}{8cv_{11}(1 - \beta_z\cos\theta)} \tag{20}$$

并利用了(11) 式，将 $\cos\theta$ 展开，舍去二阶小量后与(7) 式和(18) 式一起代入(16) 式，得

$$\gamma_1 = \mathrm{Re}\left(\frac{ieE_0\,\omega_0\,x_0\,e^{i\Phi}}{2mc^2}\right)\int_0^t \left\{\exp\left[i\frac{\omega_r + \omega_s}{\omega_r}\omega_0 t\right] - \exp\left[-i\frac{\omega_r - \omega_s}{\omega_r}\omega_0 t\right]\right\}$$
$$\cdot\exp\left[-i\frac{\omega_s}{\omega_r}\alpha\cos\omega_0 t\right]\cdot\exp\left[-i\frac{\omega_s}{\omega_r}\xi\sin(2\omega_0 t)\right]\mathrm{d}t \tag{21}$$

若将(21)式的积分变量改成

$$\tau = t/T \tag{22}$$

T 为电子与电磁波的作用时间，并将电磁波的频率 ω_s 表示为

$$\omega_s = N\omega_r + \delta\omega \tag{23}$$

式中 N 是谐波次数，$\delta\omega$ 是失谐量，那么(21) 式可写成下列形式

$$\gamma_1 = \mathrm{Re}\left(\frac{ieE_0\omega_0x_0e^{i\Phi}}{2mc^2}\cdot\frac{2\pi N_0}{\omega_0}\right)\int_0^1 \mathrm{d}\tau\left\{\exp\left[i\left(N + 1 + \frac{\delta\omega}{\omega_r}\right)2\pi N_0\tau\right] - \exp\left[i\left(N - 1 + \frac{\delta\omega}{\omega_r}\right)2\pi N_0\tau\right]\right\}$$
$$\cdot\exp\left[-i\frac{\omega_s}{\omega_r}\alpha\cos(2\pi N_0\tau)\right]\cdot\exp\left[-i\frac{\omega_s}{\omega_r}\xi\sin(4\pi N_0\tau)\right] \tag{24}$$

式中 N_0 是电子摆动的周期数。利用下述等式[15]

$$\exp[i\alpha\sin\theta] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha)\exp(in\theta) \tag{25}$$

$$\exp[i\alpha\cos\theta] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\alpha)\exp(in\theta) \tag{26}$$

式中 $J_n(\alpha)$ 是第一类贝塞尔函数。经计算得

$$\gamma_1 = \mathrm{Re}(\frac{ieE_0\omega_0x_0e^{i\Phi}}{2mc^2}\cdot\frac{2\pi N_0}{\omega_0})\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^l j_l(\frac{\omega_s}{\omega_r}\alpha)J_n(\frac{\omega_s}{\omega_r}\xi)$$
$$\cdot\int_0^1 \mathrm{d}\tau\left\{\exp\left[\left(N + 1 + l - 2n + \frac{\delta\omega}{\omega_r}\right)i2\pi N_0\tau\right] - \exp\left[\left(N - 1 + l - 2n + \frac{\delta\omega}{\omega_r}\right)i2\pi N_0\tau\right]\right\} \tag{27}$$

很显然,对于 $N_0 \gg 1$,只有当 $N \pm 1 + l - 2n = 0$ 且 $\delta\omega/\omega_r \ll 1$,即当电磁波的频率接近共振时,上式右边的积分才不为零,因此上式简化成

$$\gamma_1 = \mathrm{Re}(\frac{ieE_0\omega_0 x_0 e^{i\Phi}}{2mc^2} \cdot \frac{2\pi N_0}{\omega_0}) \sum_{l,n=-\infty}^{\infty}\sum (-i)^l J_l(N\alpha) J_n(N\xi) \cdot (\delta_{N+1,2n-l} - \delta_{N-1,2n-l}) \cdot \exp[i\pi N_0 \frac{\delta\omega}{\omega_r}] \frac{\sin(\pi N_0 \delta\omega/\omega_r)}{\pi N_0 \delta\omega/\omega_r} \tag{28}$$

式中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号,很显然,

$$l = 2n - N \pm 1 \tag{29}$$

当 $N = 1,3,5,\cdots$ 时,l 是偶数,令 $l = 2K$,(K 是整数) 此时

$$\gamma_1 = \frac{eE_0\omega_0 x_0}{2mc^2} \cdot \frac{2\pi N_0}{\omega_0} \sin(\pi N_0 \frac{\delta\omega}{\omega_r} + \Phi) \cdot \sum_{K,n=-\infty}^{\infty}\sum (-1)^K J_{2K}(N\alpha) J_n(N\xi) \cdot (\delta_{N+1,2n-2K} - \delta_{N-1,2n-2K}) \frac{\sin(\pi N_0 \delta\omega/\omega_r)}{\pi N_0 \delta\omega/\omega_r} \tag{30}$$

当 $N = 2,4,6\cdots$ 时,l 是奇数,令 $l = 2K + 1$,则

$$\gamma_1 = \frac{eE_0\omega_0 x_0}{2mc^2} \cdot \frac{2\pi N_0}{\omega_0} \cos(\pi N_0 \frac{\delta\omega}{\omega_r} + \Phi) \cdot \sum_{K,n=-\infty}^{\infty}\sum (-1)^K J_{2K+1}(N\alpha) J_n(N\xi) \cdot (\delta_{N+1,2n-2K-1} - \delta_{N-1,2n-2K-1}) \frac{\sin(\pi N_0 \delta\omega/\omega_r)}{\pi N_0 \delta\omega/\omega_r} \tag{31}$$

分别对(30)、(31) 式平方然后对 Φ 求平均再代入(1) 式,最后求得自发辐射谱分布为

$$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2 x_0^2 N_0^2 \omega_s^2}{16\varepsilon_0 c^3} [\frac{\sin(\pi N_0 \delta\omega/\omega_r)}{\pi N_0 \delta\omega/\omega_r}]^2 M(N) \tag{32}$$

式中 $M(N)$ 定义为

$$M(N) = \{\sum_{K=-\infty}^{\infty} (-1)^K J_{2K}(N\alpha)[J_{(N-1)/2+K}(N\xi) - J_{(N+1)/2+K}(N\xi)]\}^2, \quad N = 1,3,5\cdots \tag{33}$$

$$M(N) = \{\sum_{K=-\infty}^{\infty} (-1)^K J_{2K+1}(N\alpha)[J_{N/2+K}(N\xi) - J_{N/2+K+1}(N\xi)]\}^2, \quad N = 2,4,6,\cdots \tag{34}$$

结果表明,谱分布中包含有一个重要因子$(\sin D/D)^2$,它与自由电子激光增益有直接联系。另外,谱分布与 x_0^2 成正比,虽然我们已跟通常的 FEL 进行了比较,x_0 包含在 α_W 之中,然而结果告诉我们,谱分布取决于电子的初始状态,即取决于电子的注入。

4 结果讨论

本文根据 Madey 定理计算出了电子在磁场与纵向坐标无关的摆动器中的辐射谱分布。目的是要在 Pinhas 所做的工作的基础上进一步证明利用该种摆动器获得各次谐波相干辐射的可能性,而自发辐射的研究有助于我们确定实现相干辐射的可能性。从我们所得到的结果(32)式可以看出,该结果与 Colson 等人研究的普通线性摆动器自由电子激光器中的自发辐射谱[16]实际上是一样的,只有系数的差别。这就说明采用与纵向坐标无关的摆动器的重要意义。我们知道,自由电子受激辐射能量的均方根值正比于自由电子自发辐射的功率密度,而自发辐射是受激辐射的基础,当由非相干辐射转化为相干的受激辐射时,必然保持自发辐射的某些特性。至于系数差别,是我们预料之中的,因为根据加速度运动电荷的辐射谱[14]

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})\exp\left[i\omega\left(t-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right)\right]\mathrm{d}t\right|^2$$

可知，由自由电子产生辐射的特征最终由电子在磁场中的轨迹决定，而我们正在比较的这两种摆动器中的电子轨迹也是由于各自系统的参数不同而导致的系数不同。因此，从两种摆动器的自发辐射谱的相似性，我们得到如下结论：

1）各次谐波的线型和线宽是一样的，相对线宽随 $1/N_0$ 而变化，对于较高次谐波，相对线宽变得较窄。

2）所有的谐波，包括基波，当 $\gamma\theta\gg 1$，即远离轴线观察时，都一律消失，并且辐射被限制在一个锥角内，这个锥角的半角宽度的量级为 $1/\gamma$。

3）所有的偶次谐波在轴线上和 yz 平面（$\varphi=\pi/2$）都一律消失，但是在 xz 平面，当 $\theta>0$ 时，偶次谐波出现。

根据 Madey 定理第(2)式，我们还可以利用(32)式进一步求出各次谐波的增益。毫无疑问，利用相对论性电子在磁场与纵向坐标无关的摆动器中的自发辐射的高次谐波产生自由电子激光是可能的。

研究讨论电子在磁场与纵向坐标无关的摆动器中的辐射谱具有重要意义。其一，由(4)式可知，该摆动器磁场是线性的，这比通常意义上的摆动器在制做技术上要容易得多，因此，本文为定量讨论该摆动器的自由电子激光提供了依据；其二，从本文中谱分布的研究中看到，鉴于存在各式各样的摆动器，必将为进一步研究自由电子激光的机制提供了一种新的线索。

参考文献

1 L. R. Elias, W. M. Fairbank, J. M. J. Madey *et al.*. Observation of stimulated emission of radiation by relativistic electrons in a spatially periodic transverse magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 1976, **36**(13)：717～720

2 H. Motz. Applications of the Radiation from Fast Electron Beams. *J. Appl. Phys.*, 1951, **22**(5)：527～535

3 N. M. Kroll, P. L. Morton, M. N. Rosenbluth. Free-Electron Lasers with Variable Parameter Wigglers. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1981, **QE-17**(8)：1436～1468

4 王平山，胡克松，苏　毅. 双-双绕螺旋线极化摇摆器磁场. *强激光与粒子束*，1989，**1**(2)：163～168

5 A. A. Varfolomeev, M. M. Pitatelev. Harmonic generation with an external laser beam in a dual undulator. *Nucl. Inst. & Methods in Phys. Res.*, 1991, **A304**(3)：507～511

6 Shlomo Pinhas. Proposal for a FEL Novel Wiggler. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1990, **QE-26**(8)：1332～1334

7 Shlomo Pinhas. Proposal for Nobel FEL Operation. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1992, **QE-28**(11)：2567～2572

8 J. M. J. Madey. Relationship between mean radiated energy, mean squared radioted engrgy and spontaneous power spectrum in a power series expausion of the equations of motion in a free-electron laser. *Nuovo. Cimento.*, 1979, **50B**：64～88

9 D. A. G. Deacon, K. E. Robinson, J. M. J. Madey *et al.*. Gain measurements versus theory for the ACO storage ring laser. *Opt. Commun.*, 1982, **40**(5)：373～378

10 N. M. Kroll. A note on the Madey gain-spread theorem. *Phys. Quant. Electr.*, Reading, MA：Addison-Wesley. 1982, **8**：315～323

11 L. K. Grover, R. H. Pantell. Simplified Analysis of Free-electron lasers Using Madey′s Theorem. *IEEE. J. Quant. Electr.*, 1985, **QE-21**(7)：944～951

12 T. C. Marshall. Free Electron Laser. New York：Macmillan Publishing Company, 1985. 2.1～2.2

13 祝家清. 自由电子激光述评. *华中师范大学学报*，1983，(3)：55～62

14 J. D. 杰克逊[美]. 经典电动力学. 北京：人民教育出版社，1980. 244

15 梁昆淼. 数学物理方法. 北京：人民教育出版社，1979. 372

16 W. B. Colson, G. Dattoli, F. Ciocci. Angular-gain spectrum of free-electron lasers. *Phys. Rev. A.*, 1985, **31**(1)：828～842

Angular Spectrum of Spontaneous Emission in a Wiggler with Magnetic Field Independent of Axial Coordinate

Zhu Jiaqing Wen Shuangchun

(*Department of Physics, Central China Normal University, Wuhan* 430070)

Abstract Shlomo Pinhas proposed a wiggler in which magnetic field is independent of axial coordinate. The angular spectrum of spontaneous emission in this kind of wiggler is calculated by means of Madey′ s theorem in this paper. By comparing the result with that of the ordinary linearly polarized FEL, we find that they have identical forms. It is shown that a FEL operation is possible in this wiggler by using higher harmonics.

Key words FEL, wiggler, angular spectrum