

连续波飞秒锁模激光器中的三阶色散计算

王兴龙 肖绪辉 乔金元 吴小英 戴建明 王长青 姚建铨

(天津大学精仪系, 天津 300072)

提要 详细推导了连续波锁模激光器中各主要色散元件的二阶、三阶色散的表示式, 并分析计算了这些元件的色散量和色散符号。

关键词 二阶色散, 三阶色散, 飞秒锁模激光器

1 引 言

随着锁模技术的日益进步, 超短脉冲的宽度也愈来愈窄。随之出现的各种现象, 如自相位调制、扫频、自克尔效应、自聚焦及色散等, 已经引起人们的广泛重视和深入的研究。本文重点分析连续波锁模激光器中各种元件的色散关系式, 并给出其量值。而色散(及其他效应)在锁模脉冲的形成和压缩中的动力学过程我们将另文介绍。

早些时候关于二阶色散计算的文献^[1]指出, 无扫频(Frequency sweep 或 chirp, 中文也称“啾啾”)的锁模光脉冲经过色散元件后脉宽展宽, 同时脉冲产生了扫频。进一步的研究^[2~4]表明, 对扫频光脉冲用适当的色散补偿, 可以压缩脉宽。Fork 等人^[5]采用碰撞锁模技术把脉宽压缩到 100 fs 量级, Spence 等人^[6]发展的自锁模掺钛蓝宝石激光技术使锁模脉宽又大幅度压窄。人们发现在脉冲极窄(如小于 50 fs)时, 影响脉宽进一步压窄的主要因素是腔内存在较大的三阶色散^[7,8]。因此, 为减少激光腔内的三阶色散量获得更窄的锁模脉冲输出, 许多研究者都采用三阶色散小的腔内元件或选用色散符号相反的元件使它们产生的三阶色散能相互补偿一部分。

谐振腔内色散因素很多, 有增益(吸收)介质的非饱和增益(吸收)引起的色散, 有腔内其他光学元件(透明介质, 多层介质膜, 棱镜对等)引入的群速度色散等。

群速度色散简写成(GVD)。由于二阶 GVD 又称群延迟色散^[9], 所以二阶 GVD 有时记为 GDD。三阶色散通常写成 TOD。

文献中表征 GVD 的术语及符号多而且乱, 常见的术语有群速度色散系数 D , 群延时 T_g , 及相移对频率的二阶微商 φ'' , 光程对波长的二阶微商 $d^2p/d\lambda^2$ 等等。它们的关系为

$$T_g = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega P}{c} \right) \quad (1)$$

$$D = -\frac{1}{L} \cdot \frac{dT_g}{d\lambda} = \frac{\lambda}{cL} \cdot \frac{d^2P}{d\lambda^2} \quad (2)$$

$$\varphi'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = \frac{-\lambda^3}{2\pi c^2} \cdot \frac{d^2 P}{d\lambda^2} \quad (3)$$

式中 ω , λ 和 c 分别是光的角频率、波长和速度, P 和 L 是光脉冲经过某色散元件的光程和长度(见图 6)。显然, $D, T_g, d^2 p/d\lambda^2$ 和 φ'' 之间有一一对应关系。为了和计算二阶色散的经典文献^[1]一致, 本文一律用 $\varphi'' = \partial^2 \varphi/\partial \omega^2$ 及 $\varphi''' = \partial^3 \varphi/\partial \omega^3$ 来表示 GDD 和 TOD。按照规定, 色散符号决定了 D 的符号。即当 $D > 0$ 时, GVD 为正, 或者说该色散元件的色散符号为正, 或者说该元件产生正色散; 当 $D < 0$ 时, GVD 为负, 我们说该元件是负色散元件, 或者说由它产生的色散符号为负。从(2)式和(3)式可知 φ'' 与 D 的符号相反, 因此 $\varphi'' < 0$ 表示正色散, $\varphi'' > 0$ 表示负色散。

2 增益介质和吸收介质的色散

物质原子在电磁场的作用下产生感应电极化强度(即介质的极化), 感应电极化强度使物质的介电常数(因而电磁波的传播常数)发生变化, 从而导致物质对电磁波的吸收和色散。由此可见增益和吸收色散是物质原子和电磁场相互作用的结果。从经典原子模型出发, 导出物质材料折射率 n 与增益(吸收)系数之间的普遍关系^[10]:

$$n = n_1 + \alpha \frac{\Lambda \omega_0 c}{4\omega} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Lambda \omega_0/2)^2} \quad (4)$$

式中 n_1 是与增益(吸收)无关(而与材料本身有关)的折射率, α 是跃迁中心频率 ω_0 处小信号增益(吸收)系数, $\Lambda \omega_0$ 是增益(吸收)谱宽, ω 是光波角频率。若 α 表示增益系数, 则取负号; 若表示吸收系数, 则取正号。

如果增益(吸收)介质的长度为 L , 则光脉冲经过此增益(吸收)介质的相移为

$$\varphi = -\frac{\omega}{c} n L \quad (5)$$

我们先不考虑增益(吸收)介质材料本身的色散(介质色散将在第 3 节中讨论), 而仅仅考虑由增益(吸收)引起的色散, 把(4)式代入(5)式并对其求导数, 得到

$$\varphi'' = -\frac{\alpha L \Delta \omega_0}{4} \cdot \frac{(\omega_0 - \omega)[2(\omega_0 - \omega)^2 - 6(\Lambda \omega_0/2)^2]}{[(\omega_0 - \omega)^2 + (\Lambda \omega_0/2)^2]^3} \quad (6)$$

$$\varphi''' = -\frac{\alpha L \Delta \omega_0}{4} \cdot \frac{6[(\omega_0 - \omega)^4 - 6(\omega_0 - \omega)^2(\Lambda \omega_0/2)^2 + (\Lambda \omega_0/2)^4]}{[(\omega_0 - \omega)^2 + (\Lambda \omega_0/2)^2]^4} \quad (7)$$

图 1 是增益介质的色散随波长的变化曲线(不失一般性^[1], 取 $\alpha L = -1$)。由图可以看出, 对二阶色散, 在跃迁中心波长处和远离中心波长处其值为零, 在中心波长的右边和左边分别表现正色散($\varphi'' < 0$)和负色散($\varphi'' > 0$), 其色散量不超过 $\pm 200 \text{ fs}^2$; 对三阶色散, 在中心波长处 $\varphi''' \approx +15000 \text{ fs}^3$ (负色散), 在离中心波长不远的波段 $\varphi''' \approx -5000 \text{ fs}^3$ (正色散), 而远离中心波长处 $\varphi''' = 0$ 。

如果吸收系数与增益系数属同一量级(如碰撞锁模染料激光器中增益系数与吸收系数), 那么它们产生的色散绝对值也差不多同一量级, 不过色散符号相反, 在自锁模掺钛蓝宝石激光器中, 增益介质在增益中心波长处的微弱吸收(称为“残余吸收”)也能引起吸收色散, 我们计算的结果表明其值比增益色散小二个量级以上, 完全可以忽略。

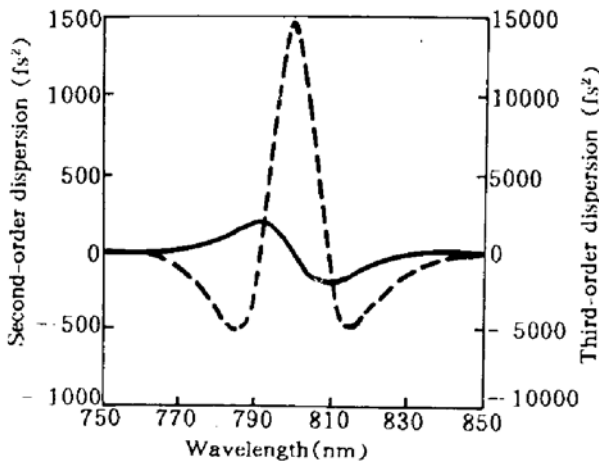


Fig. 1 Dispersion of gain medium versus wavelength. φ'' and φ''' are indicated with solid and dashed lines, respectively. The curves are obtained on the following assumptions: $\alpha L = -1$, the central wavelength of the transition is $\lambda_0 = 800$ nm, and the line width (FWHM) of the transition is $\Delta\lambda_0 = 40$ nm

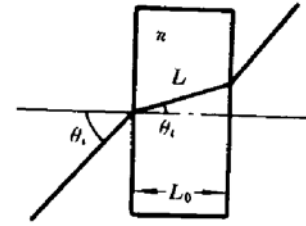


Fig. 2 Refraction of a light beam refracted by a transparent material plate. θ_i and θ_t are the incident angle and the refracted angle, respectively. L_0 is the thickness of the plate, L is the propagation length of the light within the plate, and n is the refractive index of the transparent material

3 透明材料的色散

由于超短光脉冲中包含了不同的频率(波长)成份,因此光脉冲在透明材料内部的传播速度不一致(色散)。图 2 表示一束经准直的光脉冲经过透明介质的折射情况。由折射定律和几何关系得

$$\sin\theta_i = n\sin\theta_t \quad (8)$$

$$L_0 = L\cos\theta_t \quad (9)$$

式中 θ_i , θ_t 表示光线的入射角和折射角, n 是透明材料的折射率, L_0 , L 分别表示透明材料的垂直厚度和光束在材料中传输的长度(见图 2)。

由(8)、(9)式可知,折射 n 、折射角 θ_t 和光线传输长度 L 都是频率 ω 的函数,因此利用(5)式求得的透明材料色散表示为

$$\varphi'' = -\frac{1}{c} \left[2L \frac{dn}{d\omega} + 2n \frac{dL}{d\omega} + 2n \frac{dn}{d\omega} \cdot \frac{dL}{d\omega} + \omega L \frac{d^2n}{d\omega^2} + \omega n \frac{d^2L}{d\omega^2} \right] \quad (10)$$

$$\varphi''' = -\frac{1}{c} \left[6 \frac{dn}{d\omega} \frac{dL}{d\omega} + 3L \frac{d^2n}{d\omega^2} + 3n \frac{d^2L}{d\omega^2} + 3\omega \left(\frac{dL}{d\omega} \frac{d^2n}{d\omega^2} + \frac{dn}{d\omega} \frac{d^2L}{d\omega^2} \right) + \omega \left(L \frac{d^3n}{d\omega^3} + n \frac{d^3L}{d\omega^3} \right) \right] \quad (11)$$

式中的 $dL/d\omega$, $d^2L/d\omega^2$ 及 $d^3L/d\omega^3$ 可以利用(8)、(9)两式求得

$$\frac{dL}{d\omega} = -\frac{aL_0}{n^3b^{3/2}} \cdot \frac{dn}{d\omega} \quad (12)$$

$$\frac{d^2L}{d\omega^2} = \frac{3aL_0}{n^4b^{3/2}} \left(1 + \frac{a}{n^2b} \right) \left(\frac{dn}{d\omega} \right)^2 - \frac{aL_0}{n^3b^{3/2}} \cdot \frac{d^2n}{d\omega^2} \quad (13)$$

$$\frac{d^3L}{d\omega^3} = -\frac{L_0}{n^3b^{3/2}} \left[\frac{d^3n}{d\omega^3} - 9 \left(\frac{1}{n} + \frac{a}{n^3b} \right) \frac{d^2n}{d\omega^2} \cdot \frac{dn}{d\omega} + \frac{3}{n^2} \left(4 + \frac{9a}{nb} + \frac{5a^2}{n^4b^2} \right) \left(\frac{dn}{d\omega} \right)^3 \right] \quad (14)$$

其中

$$a = \sin^2\theta_i \quad (15)$$

$$b = 1 - \sin^2\theta_i/n^2 \quad (16)$$

$$\frac{dn}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{\omega^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (17)$$

$$\frac{d^2n}{d\omega^2} = \frac{4\pi^2c^2}{\omega^4} \cdot \frac{d^2n}{d\lambda^2} + \frac{4\pi c}{\omega^3} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (18)$$

$$\frac{d^3n}{d\omega^3} = -\frac{8\pi^3c^3}{\omega^6} \cdot \frac{d^3n}{d\lambda^3} - \frac{24\pi^2c^2}{\omega^5} \cdot \frac{d^2n}{d\lambda^2} - \frac{12\pi c}{\omega^4} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (19)$$

普通玻璃的色散方程比较简单, $dn/d\lambda$, $d^2n/d\lambda^2$ 及 $d^3n/d\lambda^3$ 的表示式也比较容易求得。但熔石英和蓝宝石的色散方程较为特别, 它们对波长的二阶、三阶导数求解需要一定的技巧, 否则将变得十分复杂。由于这些色散方程及其二阶、三阶导数很长, 这里就不一一列举。

我们推导的(10), (11) 式可以计算以任意角度入射的透明材料的二、三阶色散。顺便说一下, 所有连续波自锁模掺钛蓝宝石激光腔中的钛宝石棒都切成布氏角, 而迄今为止我们所见参考文献[11, 13] 都是按正入射情况计算增益介质的 GDD, TOD。如文献[11], 棒长 $L = 17 \text{ mm}$, 布氏角切割, 用本文的(10), (11) 式解出 $\varphi'' = -1351 \text{ fs}^2$, $\varphi''' = -988 \text{ fs}^3$, 而文献[11]给出的 $\varphi'' = -1972 \text{ fs}^2$, $\varphi''' = -1431 \text{ fs}^3$, 这恰恰是误把布氏角入射当作正入射的计算值。

我们给出了几种材料的色散 φ'' , φ''' 随入射角 θ_i (图 3)、材料厚度 L_0 (图 4) 及入射光波长 λ (图 5) 的关系曲线。图 3~5 表明, 透明材料为正色散 (φ'' , $\varphi''' < 0$)。重火石玻璃 SF14 的色散量比普通光学玻璃 K9 的色散量高出 5 倍以上。

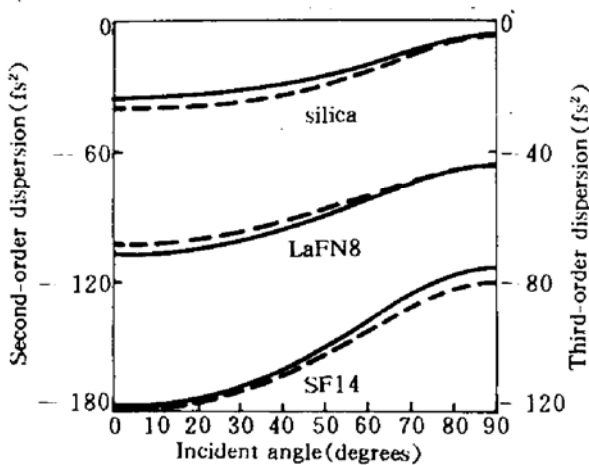


Fig. 3 Dispersion of transparent materials versus the incident angle. The central wavelength of the light is $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$, the thickness of the transparent material is $L_0 = 1 \text{ mm}$. Solid and dashed lines indicate the second-order (φ'') and third-order (φ''') dispersion, respectively

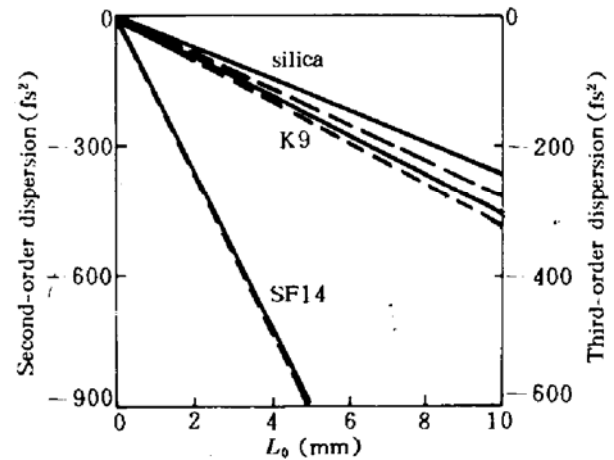


Fig. 4 Dispersion of transparent materials versus their thicknesses. The central wavelength of the incident light is $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$. Solid and dashed lines indicate φ'' and φ''' , respectively

4 棱镜对(组)的色散

棱镜对(组)能在激光谐振腔内引入可调节的色散量^[4]。经适当设计, 可使光线对棱镜的入射角和出射角均为布氏角, 这样可以最大限度地减小棱镜的插入损耗。图 6 所示的四棱镜组是由材料和加工都一样的四个棱镜组成。棱镜 I 的入射面和棱镜 II 的出射面平行, 棱镜 I 的出

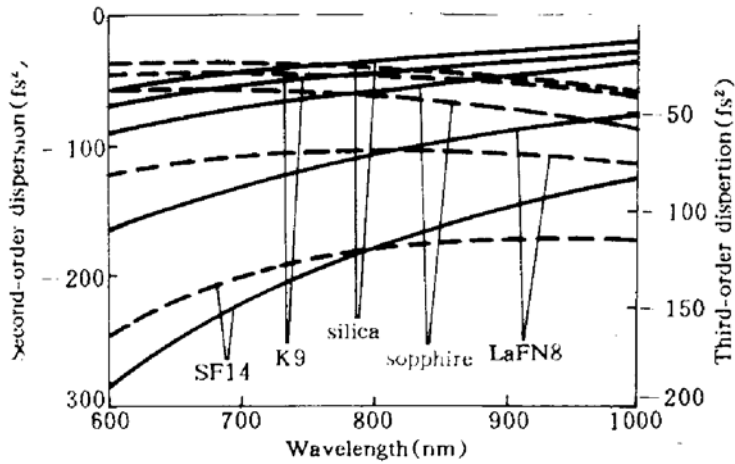


Fig. 5 Dispersion of transparent materials versus the wavelength of the incident light. The thicknesses of the transparent materials are $L_0 = 1$ mm, and the incident angle are $\theta_i = 0^\circ$. Solid and dashed lines indicate φ'' and φ''' , respectively

射面和棱镜 II 的入射面平行。如此排列的棱镜 I 和 II 称作棱镜对。两个棱镜对按图 6 所示的方式排列(它们关于平面 MM' 对称)即称为四棱镜组。一般地,棱镜对用在驻波腔中(此时 MM' 处有一个全反腔镜存在),而四棱镜组用于行波腔(偶尔亦用于驻波腔)。光脉冲两次经过棱镜对产生的色散和一次通过四棱镜组的色散量相同。

为计算棱镜对的色散,我们把(5)式写成

$$\varphi = -\frac{\omega}{c}P \quad (20)$$

式中 P 是光脉冲经过棱镜对的光程。于是棱镜对的色散可表示为

$$\varphi'' = -\frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \cdot \frac{d^2P}{d\lambda^2} \quad (21)$$

$$\varphi''' = -\frac{\lambda^4}{4\pi^2 c^3} \left(3 \frac{d^2P}{d\lambda^2} + \lambda \frac{d^3P}{d\lambda^3} \right) \quad (22)$$

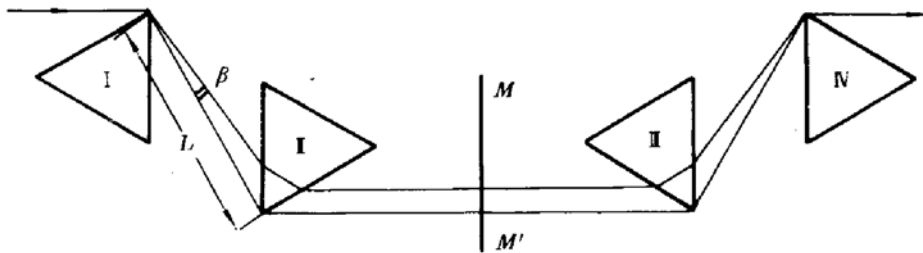


Fig. 6 Four-prism sequence having negative dispersion. The prisms are used at minimum deviation and oriented so that the light beams enter and leave at Brewster's angle. The prism-pair composed of prisms I and II and the prism-pair composed of prisms III and IV are symmetric about the plane MM'

对四棱镜组, Fork 等人^[4]导出

$$\frac{d^2P}{d\lambda^2} = 4L \left\{ \left[\frac{d^2n}{d\lambda^2} + \left(2n - \frac{1}{n^3} \right)^2 \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)^2 \right] \sin\beta - 2 \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)^2 \cos\beta \right\} \quad (23)$$

式中 L 是棱镜对中两个棱镜顶点到顶点的距离, β 是光线与参考线之间的夹角(见图 6)。

为了计算 TOD, 我们还需要知道 $d^3P/d\lambda^3$ 的表示式, 但文献[4, 14] 仅给出了近似值。Lemoff 等人^[15]虽然给出了完整的表示式, 但他们的结果显然有误。我们经过详细推导得

$$\begin{aligned} \frac{d^3P}{d\lambda^3} = & 4L \sin\beta \left[\frac{d^3n}{d\lambda^3} + \left(\frac{3}{n^4} - 2 \right) \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)^3 + \left(4n - \frac{2}{n^3} \right) \frac{dn}{d\lambda} \cdot \frac{d^2n}{d\lambda^2} \right] \\ & + 4L \cos\beta \left[\left(\frac{2}{n^3} - 4n \right) \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)^3 - 6 \frac{dn}{d\lambda} \cdot \frac{d^2n}{d\lambda^2} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

由于构成棱镜的材料能产生色散(见本文第 3 节), Fork 等人推导(23)式时没有考虑棱镜的插入深度(即假设光线刚好从棱镜的顶端通过)而仅仅考虑了棱镜对(组)的角色散。角色散总是负的^[16] ($\varphi'', \varphi''' > 0$)。为了简化计算, Fork 等人对(23)式作了不合理的近似, 以致得出了四棱镜组色散量可以由正到负的可连续可调的错误结论。实际上, 图 6 所示的棱镜组色散值只

能为负或零。

图 7 给出了光脉冲单次通过棱镜对时产生的 φ'' , φ''' 与 L 的关系曲线, SF14 材料的棱镜对色散量比熔石英的色散量高出一个量级以上。顺便说一下, 一般 $\beta = 1 \sim 3$ mrad, 而当 β 从 1 mrad 变到 3 mrad 时, φ'' , φ''' 量值改变不超过 5%, 棱镜对(组)产生的负色散量很大, 而且可以通过改变棱镜之间的距离 L 来调节色散量。

图 8 是光线单次通过棱镜对时的 φ'' , φ''' 与入射光脉冲的中心波长之间的关系曲线。我们看到熔石英棱镜对的色散随波长变化较缓, 而 SF14 棱镜对的色散随波长变化极为明显, 而且在掺钛蓝宝石激光增益中心波长附近其 TOD 非常大。

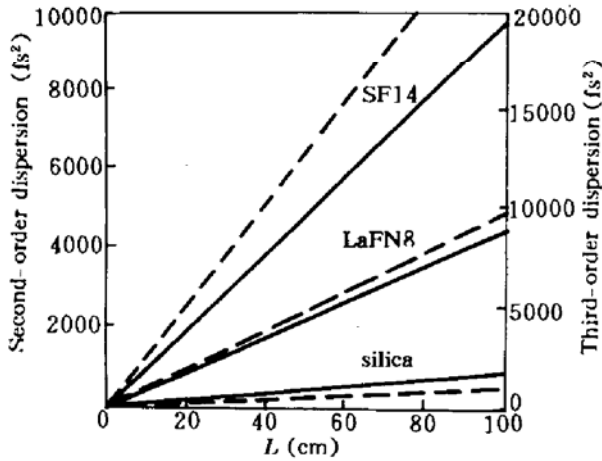


Fig. 7 Dispersion of single-pass prism pair versus L . The central wavelength is $\lambda_0 = 800$ nm, and the divergence angle becomes $\beta = 3$ mrad after refracting by prism 1. Solid and dashed lines indicate φ'' and φ''' , respectively

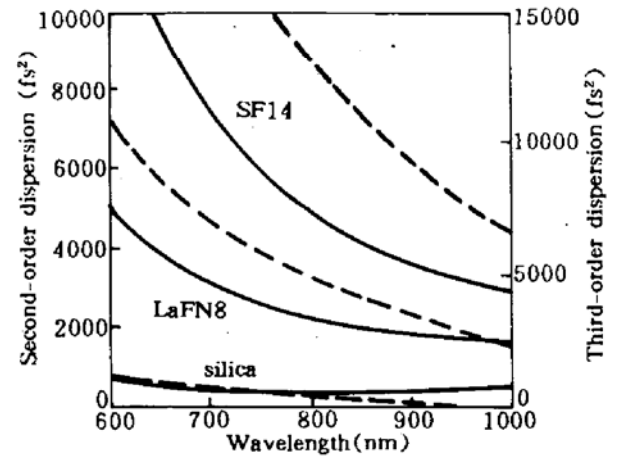


Fig. 8 Dispersion of single-pass prism pair versus the central wavelength. Parameters used are $L = 50$ cm, and $\beta = 3$ mrad. Solid and dashed lines indicate φ'' and φ''' , respectively

早些时候人们在自锁模掺钛蓝宝石激光器中插入重火石玻璃棱镜对, 以引入足够量的负色散(GDD)对扫频强烈的锁模脉冲进行补偿, 获得了数十飞秒的光脉冲。但后来发现重火石玻璃 TOD 很大(见图 8), 这对脉冲进一步压缩是极为不利的^[7,8]。于是人们开始选用其他折射率高而 TOD 小的材料^[17]或更多熔石英棱镜^[18]按特殊规则排列的棱镜系统来引入色散, 结果分别在自锁模掺钛蓝宝石激光器中获得了 17 fs 和 20 fs 的输出。而前者^[17]今年又获得了 10.9 fs 的输出^[19]。

5 总 结

本文是我们在自锁模掺钛蓝宝石激光器的研究过程中的一些关于色散计算的方法介绍。在该激光谐振腔中产生色散的主要元件有: 1) 增益介质的非饱和增益色散, 其符号与波长有关, 在增益中心波长附近, $|\varphi''| < 200$ fs², $|\varphi'''| < 15000$ fs³; 2) 由于“残余吸收”的存在, 钛宝石晶体在增益中心波长处的微弱吸收亦引入色散, 不过其色散量比增益色散小二个量级以上; 3) 钛宝石棒作为透明材料, 它还要产生正色散, 对通光长度为 20 mm 的激光棒, 在增益中心波长附近材料色散值为 $\varphi'' = -795$ fs², $\varphi''' = -581$ fs³(这里假设光线布氏角入射); 4) 腔内插入的重火石玻璃 SF14 棱镜对产生的负色散量可以在非常大的范围内调节, 当棱镜之间的距

离 $L = 0 \sim 50 \text{ cm}$ 时, 有 $\varphi'' = 0 \sim 5000 \text{ fs}^2$, $\varphi''' = 0 \sim 13500 \text{ fs}^3$ 。注意, 上述计算结果都是光脉冲单次通过色散元件的色散值。

除上述色散元件外, 腔内产生色散的元件还有介质膜片。不过计算结果表明^[1], 通常使用单膜系介质膜片在镀膜中心波长与激光增益中心波长接近时, 其色散值极小, 完全可以忽略。

致谢 在本文的写作过程中, 作者曾就许多内容与胡国锋博士、赵长明博士作过十分有益的讨论, 在此对他们表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- 1 S. De Silvestri *et al.*. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1984, **QE-20**(5): 533
- 2 W. Dietel *et al.*. *Opt. Lett.*, 1983, **8**: 4
- 3 J. P. Gordon, R. L. Fork. *Opt. Lett.*, 1984, **9**: 153
- 4 R. L. Fork *et al.*. *Opt. Lett.*, 1984, **9**: 150
- 5 R. L. Fork *et al.*. *Appl. Phys. Lett.*, 1981, **38**: 671
- 6 D. E. Spence *et al.*. *Opt. Lett.*, 1991, **16**: 42
- 7 W. H. Knox. *Opt. Lett.*, 1992, **17**: 514
- 8 K. Naganuma *et al.*. *Opt. Lett.*, 1991, **16**: 738
- 9 P. F. Curley *et al.*. *Opt. Lett.*, 1993, **18**: 54
- 10 周炳琨等. 激光原理, 北京: 国防工业出版社, 1980. 55
- 11 J. M. Jacobson *et al.*. *Opt. Lett.*, 1992, **17**: 1608
- 12 B. E. Lemoff *et al.*. *Opt. Lett.*, 1992, **17**: 1367
- 13 N. Sarukura *et al.*. *Opt. Lett.*, 1991, **16**: 153
- 14 R. L. Fork *et al.*. *Opt. Lett.*, 1987, **12**: 483
- 15 B. E. Lemoff *et al.*. *Opt. Lett.*, 1993, **18**: 57
- 16 O. E. Martinez *et al.*. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1984, **1**: 1003
- 17 C. P. Huang *et al.*. *Opt. Lett.*, 1992, **17**: 1289
- 18 Bob Proctor *et al.*. *Opt. Lett.*, 1992, **17**: 1295
- 19 M. T. Asaki *et al.*. *Opt. Lett.*, 1993, **18**: 977

Calculation of Third-order Dispersion in a Femtosecond Continuous Wave Mode-locked Laser

Wang Xinglong Xiao Xuhui Qiao Jinyuan Wu Xiaoying Dai Jianming
Wang Chanqing Yao Jianquan

(Department of Precision Instrument Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072)

Abstract Exact expressions of second- and third-order dispersions of optical components in a femtosecond continuous wave mode-locked laser are derived out. The dispersion values and their signs of intracavity main dispersion elements are also calculated.

Key words second-order dispersion, third-order dispersion, femtosecond mode-locked laser