第21卷 第8期 1994年8月
中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS
Vol. A21, No. 8 August, 1994

飞秒光脉冲自聚焦的时空特性的解析研究

朱莳通
(中国科学院上海光机所，上海 201800)

章介伦 沈文达 曹吉平
(上海科技大学物理系，上海 201800)

提要 在柱对称假定下，导出了 2+1 维时空的非线性 Schrödinger 方程，得到了光束在色散介质中传播的解析解，以及自聚焦焦点的位置。

关键词 时空聚焦，自聚焦

1 引 言

光脉冲的自聚焦一直是许多年来一个活跃和有趣的研究课题[1~15]。对于纳秒(nanosecond)脉冲情况，已经由 Y. R. Shen[1] 和 V. N. Lugovi[2] 等用稳态(连续波)自聚焦理论和准连续波运动焦点模型进行了研究，得到了比较清楚的理解。对于飞秒(femtosecond)脉冲的自聚焦，也已由许多文献[3~10]进行了研究。结果表明，必须考虑群速度色散(GVD)效应。特别是对于正常 GVD，飞秒脉冲在自聚焦终结前，对称地分裂成两个脉冲[6,7]。对于反常 GVD，文献[8～10]预言了时空自聚焦(space-time self-focusing)，不稳定和自陷传播等现象。在这些分析中，都利用了慢变包络近似(SVEA)。光脉冲的传播是用非线性 Schrödinger 方程描述的。然而，文献[15]指出在 SVEA 中导出的非线性 Schrödinger 方程不适合描述飞秒脉冲的自聚焦。用分析短脉冲聚焦的时空性质，Rothenberg 发现离轴射线群速度的变化引起自聚焦脉冲不对称地发展成一个具有抬高尾部的时间结构。

本文在文献[15]的基础上，作了柱对称的假定，解析地研究了光脉冲在色散介质中自聚焦的时空性质以及自聚焦焦点的位置。

2 光脉冲在色散介质中的自聚焦

根据 Rothenberg 对自聚焦时空性质的研究[15]，光脉冲在色散介质中传播的方程为非线性 Schrödinger 方程：

$$\frac{\partial E}{\partial z}+i\left(\frac{k^{(2)}}{2}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-\frac{i}{2k_0}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right)=in_2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)|E|^2E \tag{1}$$

其中 $k_0=n_0(\omega/c)$，$k^{(2)}=(\partial^2 k/\partial\omega^2)|_{\omega_0}$。$\omega_0$ 为传播波的频率，n_2 为折射率的二阶项。

将方程(1)写成柱坐标下的形式，并假设介质是柱对称的，不计光场对 ϕ 角的导数，于是，(1)式可简化成

收稿日期：1993年7月9日；收到修改稿日期：1993年11月1日

$$\frac{\partial E}{\partial z}+i\left(\frac{k^{(2)}}{2}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-\frac{i}{2k_0 r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right)\equiv in_2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)|E|^2E \tag{2}$$

设光场具有如下复振幅形式[15]

$$E(r,z,t)=E_0(r,z,t)\exp[-kr^2/2R(z)]\exp[-iks(z)] \tag{3}$$

其中 $R(z)=-(k/k_0)z+R_0$，为径向相位等相位面的曲率半径，R_0 是 $z=0$ 处的曲率半径，$S(z)$ 为 E 的纵向相位。将(3) 式代入方程(2)，按实部和虚部，得到

$$\frac{\partial E_0}{\partial z}-\frac{kr}{k_0R(z)}\frac{\partial E_0}{\partial r}-\frac{k}{k_0R(z)}E_0=0 \tag{4}$$

$$\left(\frac{k^{(2)}}{2}\right)\frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}-\frac{1}{2k_0r}\frac{\partial E_0}{\partial r}-\frac{1}{2k_0}\frac{\partial^2 E_0}{\partial r^2}-k\frac{\partial S(z)}{\partial z}E_0=n_2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)|E_0|^2E_0 \tag{5}$$

下面讨论两种情况：

2.1　$n_2=0$ 的情况

作分离变量 $E_0(r,z,t)=A(T,z)\psi(t)$，将其代入方程(4) 和(5)，得到

$$\frac{\partial A(r,z)}{\partial z}-\frac{kr}{k_0R(z)}\frac{\partial A(r,z)}{\partial r}-\frac{k}{k_0R(z)}A(r,z)=0 \tag{6}$$

$$\frac{1}{\psi(t)}\left(\frac{k^{(2)}}{2}\right)\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}-\frac{1}{2k_0rA(r,z)}\frac{\partial A(r,z)}{\partial r}-\frac{1}{2k_0A(r,z)}\frac{\partial^2 A(r,z)}{\partial r^2}-k\frac{\partial S(z)}{\partial z}=0 \tag{7}$$

由方程(7)可知

$$\frac{1}{\psi(t)}\left(\frac{k^{(2)}}{2}\right)\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}=\tau \tag{8}$$

求解方程(8)，得到

$$\psi(t)=C_1\exp\left[-\sqrt{\frac{\partial\tau}{k^{(2)}}}(t+t_0)\right]+C_2\exp\left[\sqrt{\frac{\partial\tau}{k^{(2)}}}(t-t_0)\right]$$

由(7)和(8)式，得到

$$\tau-\frac{1}{2k_0rA(r,z)}\frac{\partial A(r,z)}{\partial r}-\frac{1}{2k_0A(r,z)}\frac{\partial^2 A(r,z)}{\partial r^2}-k\frac{\partial S(z)}{\partial z}=0 \tag{9}$$

上式乘以 $2r^2k_0A(r,z)$，得到

$$r^2\frac{\partial^2 A(r,z)}{\partial r^2}+r\frac{\partial A(r,z)}{\partial r}+2k_0\left(k\frac{\partial S(z)}{\partial z}-\tau\right)r^2A(r,z)=0 \tag{10}$$

(10)式是一个贝塞尔方程，其解的形式为

$$A(r,z)=B(z)J_0(\lambda',r)$$

其中 $\lambda'^2=2k_0\{k[\partial S(z)/\partial z]-\tau\}$

2.2　$n_2\neq 0$ 的情况

设方程(5) 的解具有如下形式

$$E_0=\psi(t)B(z)J_0(\lambda r)$$

而

$$\psi(t)=C_1e^{\beta t}+C_2e^{-\beta t}$$

由于激光脉冲的脉宽很短，所以在一个脉冲内

$$|\psi(t+T)|/|\psi(t)|=1$$

对于近轴光线，$J_0(\lambda r)=1$。因此，可以作近似

$$|E|^2=|E_0|^2=|\psi(t)|^2|A(r,z)|^2\simeq|B(z)|^2$$

方程(5)变为

$$\left(\frac{k^{(2)}}{2}\right)\frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}-\frac{1}{2k_0 r}\frac{\partial E_0}{\partial r}-\frac{1}{2k_0}\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}-k\frac{\partial S(z)}{\partial z}E_0=n_2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)|B(z)|^2E_0 \tag{11}$$

作分离变量 $E_0(r,z,t)=\psi(t)A(r,z)$，将其代入方程(11)得到

$$\frac{1}{\psi(t)}\left(\frac{k^{(2)}}{2}\right)\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial t^2}-\frac{1}{2k_0 rA(r,z)}\frac{\partial A(r,z)}{\partial r}-\frac{1}{2k_0A(r,z)}\frac{\partial^2 A(r,z)}{\partial r^2}-k\frac{\partial S(z)}{\partial z}=n_2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)|B(z)|^2 \tag{12}$$

由方程(12)可知

$$\frac{1}{\psi(t)}\left(\frac{k^{(2)}}{2}\right)\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial t^2}=\tau \tag{13}$$

其中 τ 是一个待定常数。

求解方程(13)，得到

$$\psi(t)=C_1\exp\left(-\sqrt{\frac{2\tau}{k^{(2)}}}t\right)+C_2\exp\left(\sqrt{\frac{2\tau}{k^{(2)}}}t\right)$$

假定输入激光脉冲的半宽为 t_0，则有

$$C_1=0 \qquad t<-t_0$$

$$C_2=0 \qquad t>t_0$$

将方程(13)代入方程(12)，两边乘以 $2k_0r^2A(r,z)$，得到

$$r^2\frac{\partial^2 A(r,z)}{\partial r^2}+r\frac{\partial A(r,z)}{\partial r}+2k_0\left[k\frac{\partial S(z)}{\partial z}-\tau-n_2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)|B(z)|^2\right]r^2A(r,z)=0 \tag{14}$$

因而，$A(r,z)$ 可以写成 $\quad A(r,z)=B(z)J_0(\lambda,r)$

其中

$$\lambda^2=2k_0\left[k\frac{\partial S(z)}{\partial z}-\tau+n_2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)|B(z)|^2\right] \tag{15}$$

于是，我们有

$$\frac{\partial A(r,z)}{\partial z}=J_0(\lambda,r)\frac{\mathrm{d}B(z)}{\mathrm{d}z}-B(z)J_1(\lambda,r)r\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}z} \tag{16}$$

$$\frac{\partial A(r,z)}{\partial r}=-B(z)J_1(\lambda,r)\lambda \tag{17}$$

将(16)和(17)式代入方程(6)，得到

$$\frac{\mathrm{d}B(z)}{\mathrm{d}z}J_0(\lambda,r)-B(z)J_1(\lambda,r)r\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}z}+\frac{kr}{k_0R(z)}\lambda B(z)J_1(\lambda,r)-\frac{k}{k_0R(z)}B(z)J_0(\lambda,r)=0 \tag{18}$$

考察方程(18)，得出

$$\frac{\mathrm{d}B(z)}{\mathrm{d}z}-\frac{kB(z)}{k_0R(z)}=0 \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}z}-\frac{k\lambda}{k_0R(z)}=0 \tag{20}$$

方程(19)和(20)的解为

$$B(z)=\frac{1}{z-R_0(k_0/k)}$$

$$\lambda=\frac{1}{z-R_0(k_0/k)}$$

因而，由(16)式得到

$$S(z)=\frac{[n_2(\omega_0/c)-1/2k_0]}{z-R_0(k_0/k)}+\tau z$$

于是，光场振幅 $E_0(r,z,t)$ 可以写成

$$E_0(r,z,t)=\psi(t)A(r,z)=A(r,z)\psi(t)=\frac{J_0\left[\dfrac{r}{z-R_0(k_0/k)}\right]}{z-R_0(k_0/k)}\left[c_1\exp\left(-\sqrt{\frac{2\tau}{k^{(2)}}}t\right)+c_2\exp\left(\sqrt{\frac{2\tau}{k^{(2)}}}t\right)\right]$$

而光强 I 可以表示成

$$I = |E_0|^2 = \frac{J_0^2\left[\dfrac{r}{z - R_0(k_0/k)}\right]}{[z - R_0(k_0/k)]^2}\left\{C_1\exp\left[-\sqrt{\frac{2\tau}{k^{(2)}}}t\right] + C_2\exp\left[\sqrt{\frac{2\tau}{k^{(2)}}}t\right]\right\}^2$$

光强随时间 t 的变化示于图 1

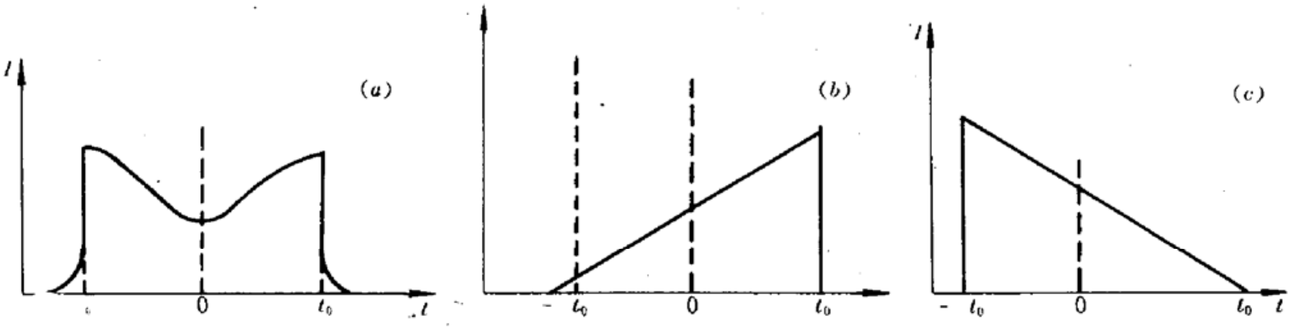

Fig. 1　The changes of optical intensity vs time

(a) $C_1 = C_2$; (b) $C_1 = 0$; (c) $C_2 = 0$

图 1(a) 显示了 $C_1 = C_2$ 情况，这时，脉冲分裂成两个对称的峰，这定性符合文献[16]对双曲正割时间强度分布数值积分的结果。若 $C_1 \neq C_2$，则具有两个峰的脉冲偏离对称性，一个峰升高，而另一个峰降低。图 1(b) 和图 1(c) 分别对应了这样的极端情况。图 1(b) 对应 $C_1 = 0$。图 1(c) 对应 $C_2 = 0$。

图 2 显示了光强 I 的径向分布。容易看到，光强的径向变化呈振荡衰减分布。

图 3 给出了光强沿 z 方向的纵向分布。当 $z < z_0(k_0/k)$ 时，光强随 z 的增大而逐渐增强，当 $z > z_0(k_0/k)$ 时，光强随 z 的增大而逐渐减弱。在 $z = z_0(k_0/k)$ 处达到最大值。因而，$z = z_0(k_0/k)$ 是焦点位置。

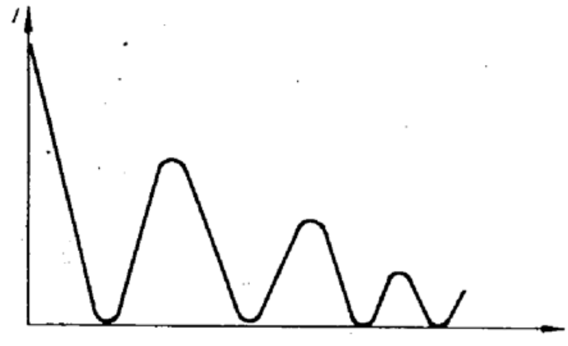

Fig. 2　The radius distribution of optical intensity

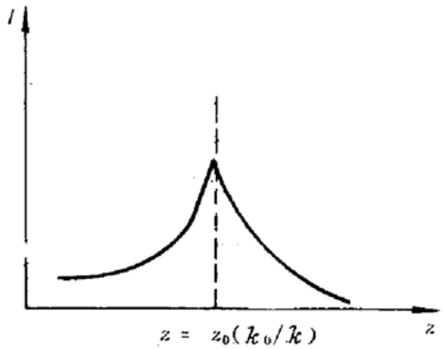

Fig. 3　The longitudinal distribution of optical intensity

3　总　结

本文在文献[16]的基础上，作了柱对称假定，利用简化后的 2+1 维时空非线性 Schrödinger 方程，解析地研究了短脉冲光束在色散介质中的自聚焦问题，所得的结果，物理图像清淅。光场随空间和时间的变化定性符合前人的数值分析。应该指出，在求解过程中，我们忽略了 n_2 对脉冲形状的影响。更严格的求解应该通过分离变量 $E_0(r,z,t) = \psi(t,z)A(r,z)$，将其代入方程(5) 来进行。显然，这时方程(5) 可改写成

$$\left(\frac{k^{(2)}}{2}\right)\frac{1}{\psi(t,z)}\frac{\partial^2\psi(t,z)}{\partial t^2}-\left[\frac{1}{2k_0r}\frac{\partial A(r,z)}{\partial r}+\frac{1}{2k_0}\frac{\partial^2 A(r,z)}{\partial r^2}\right]\frac{1}{A(r,z)}-k\frac{\partial S(z)}{\partial z}$$
$$=n_2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)|B(z)|^2\psi(t,z)|^2$$

把这方程与方程(4)联立,可得如下方程组

$$\begin{cases}\left(\frac{k^{(2)}}{2}\right)\frac{1}{\psi(t,z)}\frac{\partial^2\psi(t,z)}{\partial t^2}-n_2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)|B(z)|^2|\psi(t,z)|^2+\tau(z)=0\\ \tau(z)-\left[\frac{1}{2k_0r}\frac{\partial A(r,z)}{\partial r}+\frac{1}{2k_0}\frac{\partial^2 A(r,z)}{\partial r^2}\right]\frac{1}{A(r,z)}-k\frac{\partial S(z)}{\partial z}=0\\ \frac{\partial E_0}{\partial z}-\frac{kr}{k_0R(z)}\left(\frac{\partial E_0}{\partial r}\right)-\frac{k}{k_0R(z)}E_0=0\end{cases}$$

求解上面的方程组,可以得到更严格的解。

参 考 文 献

1 Y. R. Shen. *Prog. Quant. Electr.*, 1975, **4**: 1; J. H. Marbuger. *Prog. Quant. Electr.*, 1975, **4**: 35
2 V. N. Lugovi, A. M. Prokhorov. *JETP Lett.*, 1968, **1**: 117; M. M. T. Loy, Y. R. Shen. *Phys. Rev. Lett.*, 1969, **22**: 994
3 J. H. Glownia, G. Arjavalingam, P. P. Sorokin *et al.*. *Opt. Lett.*, 1986, **11**: 79; J. H. Glownia, J. Misewich, P. P. Sorokin. *J. Opt. Soc. Am.*, 1986, **B3**: 1573
4 P. B. Corkum, C. Rolland, T. Srinivasan-Rao. *Phys. Rev. Let.*, 1986, **57**: 2268; P. B. Corkum, C. Rolland. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1989, **QE-25**: 2634; D. Strickland, P. B. Corkum. *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, 1991, **1413**: 54
5 D. Huang, M. Ulman, L. H. Acioli *et al.*. *Opt. Lett.*, 1992, **17**: 583
6 P. Chernev, V. Petrov. *Opt. Lett.*, 1992, **17**: 172
7 J. E. Rothenberg. *Opt. Lett.*, 1992, **17**: 583
8 V. E. Zakharov, V. S. Synakh. *Sov. Phys. JETP*, 1976, **41**: 465; *Sov. Phys. JETP*, 1976, **41**: 465; S. N. Vlasov, L. V. Piskunova, V. I. Talanov. *Sov. Phys. JETP*, 1989, **68**: 1125
9 Y. Silberberg. *Opt. Lett.*, 1990, **15**: 1282
10 N. N. Akhmediev, V. I. Korneev, R. F. Nabiev. *Opt. Lett.*, 1990, **17**: 393
11 Z. Bor. *Opt. Lett.*, 1989, **14**: 119
12 F. DeMartini, C. H. Townes, T. K. Gustafson *et al.*. *Phys. Rev.*, 1967, **164**: 312
13 M. D. Feit, J. A. Fleck. *J. Opt. Soc. Am.*, 1988, **B5**: 633
14 G. Yang, Y. R. Shen. *Opt. Lett.*, 1984, **9**: 510
15 J. E. Rothenberg. *Opt. Lett.*, 1992, **17**: 1340
16 J. T. 维德延著,陈尔绍,吴芝兰 译. 激光电子学. 北京:电子工业出版社,1987. 第三章

Analytical Research of Space-time Nature of the Self-focusing for Femtosecond Pulse

Zhu Shitong

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai* 201800)

Zhang Jialun Shen Wenda Cao Jieping

(*Department of Physics, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai* 201800)

Abstract Nonlinear Schrödinger equation for 2+1 dimensions space-time is derived under the suppose of cylindrical symmetry. The analytical solution of the light beam propagation in a dispersive medium is obtained and the focus location of self-focusing is given.

Key words space-time focusing, self-focusing