

小孔列阵远场衍射光强分布

隋成华

(浙江工业大学物理教研室, 杭州 310014)

王中阳 林 强

(杭州大学物理系, 杭州 310028)

提要 导出了 Fraunhofer 近似下小孔列阵衍射光强的分布函数, 详细计算了单色光均匀照明下的衍射光强, 给出了一些新的结果, 并对小孔列阵的远场适用条件作了探讨。

关键词 小孔列阵, 单色光均匀照明, 远场衍射, 光强分布

1 引 言

由于小孔列阵能形成无常规像差、无畸变高分辨率的图像, 具有多重、长景深和高缩放率的成像性质, 在成像光学和光信息处理中应用非常广泛, 如小孔列阵相机^[1]和图像处理等^[3]。特别是在 X 射线和红外波段, 由于缺少合适的成像元件, 则小孔列阵(即编码孔列阵)元件具有独特的优点^[2~4]。以前处理小孔列阵的成像问题时, 或仅考虑了小孔的投影成像, 认为列阵形成的多像是均光强的, 对像差问题未作更深一步讨论^[2,3]; 或虽利用衍射理论和光学传递函数, 但没有细致考虑小孔的空间平移效应, 因而将小孔列阵的远场适用条件等同于单孔^[4~6]。本文不仅考虑了每个小孔的衍射成像且细致地讨论了空间平移效应影响, 得出小孔列阵成像不是等光强的, 具有很大的调制, 并对远场适用条件作了探讨, 与文献[5]的结果作了比较, 得出在近远场范围内, 其结果需要修正。本文结果对小孔列阵成像、像差的确定有直接指导意义。

2 理 论

2.1 小孔列阵衍射光强分布函数

考虑光入射至屏上的一个小孔, 当孔在屏上移动, 中心坐标分别为 (ζ_1, η_1) , (ζ_2, η_2) , $\dots, (\zeta_n, \eta_n)$ 时, 其在像平面上的成像又如何变化呢? 显然, 根据空间平移不变性, 在像平面上的成像也跟着小孔移动。同样对于小孔列阵, 每个小孔对像的贡献也存在着平移问题, 对于一屏上具有一定分布的小孔列阵, 如编码孔成像, 不仅要考虑到小孔的衍射, 还要细致地考虑空间平移效应。单孔的衍射公式都将坐标原点取在孔上, 若将原点取在孔外任一点, 则只要将原坐标平移。

设取孔平面上孔外一点 O 为原点(坐标取在孔平面上), 此时孔中心坐标 D 为 (ζ_0, η_0) , P_0 与

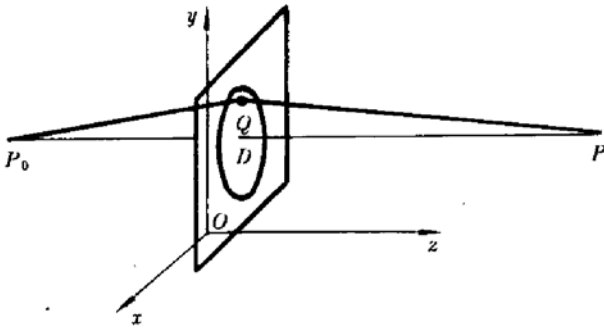


Fig. 1 Optical scheme of pinhole array far-field diffraction

P 点坐标分别为 (x_1, y_1, z_0) , (x_2, y_2, z) , O 点坐标为 $(\xi + \xi_0, \eta_0 + \eta)$ (图 1)。其衍射公式仍可写为^[5]

$$U(p) = -\frac{A i \cos \delta}{\lambda \gamma' s'} \iint e^{i k(\gamma + s)} dS \quad (1)$$

式(1)中 A 为光强常数,但此时 γ' , s' , γ 和 s 相应于孔上坐标有一平移。

$$\gamma' = [(x_1 - \xi_0)^2 + (y_1 - \eta_0)^2 + z_0^2]^{1/2}$$

$$s' = [(x_2 - \xi_0)^2 + (y_2 - \eta_0)^2 + z^2]^{1/2}$$

$$\gamma = [(x_1 - \xi_0 - \xi)^2 + (y_1 - \eta_0 - \eta)^2 + z_0^2]^{1/2}$$

$$s = [(x_2 - \xi_0 - \xi)^2 + (y_2 - \eta_0 - \eta)^2 + z^2]^{1/2}$$

δ 为 $\overline{PP_0}$ 与孔平面夹角,为倾斜因子在孔上的近似。

类似文献[5]的推导,将 γ, s 对 γ', s' 展开,取一次项近似,得在远场表达式:

$$U(p) = -\frac{i \cos \delta}{\lambda} \frac{A \cdot e^{i k(\gamma' + s')}}{\gamma' s'} \iint e^{i k(\gamma \xi + \eta \eta)} d\xi d\eta \quad (2)$$

式中

$$p = \frac{x_1 - \xi_0}{\gamma'} + \frac{x_2 - \xi_0}{s'}$$

$$q = \frac{y_1 - \eta_0}{\gamma'} + \frac{y_2 - \eta_0}{s'}$$

考虑单色光均匀照明圆孔的情况,上式可解为

$$U(p) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{i k s'}}{s'} \cdot \pi a^2 \cdot \frac{2J_1(Kaw)}{Kaw} \quad (3)$$

式中

$$w = \sqrt{p^2 + q^2}$$

对于具有一定分布、孔径相同、取向一致的小孔列阵,若其孔中心坐标分别为 (U_1, V_1) , (U_2, V_2) , $\dots, (U_n, V_n)$,其在远场的场分布分别为各个小孔场分布的叠加:

$$U(p) = -\frac{i \pi a^2}{\lambda} \sum_n \frac{e^{i k s'_n}}{s'_n} \cdot \frac{2J_1(Kaw)}{Kaw} \quad (4)$$

$$I(p) = \frac{\pi^2 a^4}{\lambda^2} \left| \sum_n \frac{e^{i k s'_n}}{s'_n} \cdot \frac{2J_1(Kaw)}{Kaw} \right|^2 \quad (5)$$

式中

$$s'_n = [(x_2 - U_n)^2 + (y_2 - V_n)^2 + z^2]^{1/2}$$

$$w = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad p = \frac{x_2 - U_n}{s'_n}, \quad q = \frac{y_2 - V_n}{s'_n}$$

s'_n, w 均含平移因子 U_n, V_n ; U_n, V_n 的取值与原点选择密切相关。

2.2 公式分析与讨论

现将(4)式中含平移因子项 $e^{i k s'_n}$ 的 $s'_n = [(x_2 - U_n)^2 + (y_2 - V_n)^2 + z^2]^{1/2}$ 对 $s_0 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ 展开:

$$s'_n \sim s_0 - \frac{x_2 U_n + y_2 V_n}{s_0} + \frac{U_n^2 + V_n^2}{2s_0} - \frac{(x_2 U_n + y_2 V_n)}{2s_0^3} + \dots$$

若只取一次项,忽略二次项和高次项,且认为远场衍射波在一定方向的余弦上为平面波,则从(5)式可退化文献[5]的结果

$$I(p, q) = I^{(0)}(p, q) \left| \sum_n e^{-i k(p U_n + q V_n)} \right|^2 \quad (6)$$

$I^{(0)}(p, q)$ 是单孔产生的强度分布。

对单个小孔, Fraunhofer 近似条件为

$$z \approx |S| \gg \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{\lambda} = \frac{a^2}{\lambda}$$

同样, (4) 式中 $e^{iks'}$ 的 S' 取一次项近似条件为

$$z \approx |S| \gg \frac{(U_n^2 + V_n^2)_{\max}}{\lambda}$$

其中, (U_n, V_n) 为小孔列阵上第 n 个孔的中心坐标, $|(U_n^2 + V_n^2)_{\max}|^{1/2}$ 与小孔列阵尺寸有相同数量级, 一般比孔径要大十倍、百倍, 其平方则更大, 此时要将 s' 展开只取一次项, 需将远场拉到更远, 而在 $z \gg a^2/\lambda$ 一段近远场区域内, 忽略 s' 展开项中的二次项, 高次项会带来很大误差, 即光斑尺寸会变大, 这主要是因坐标原点 O 在孔平面上是任取的, 此种对 \overline{PO} 的展开不很恰当。小孔列阵在这段区域内的特性必须作更进一步的分析。

3 计算结果、分析、比较

本文计算了一个对称分布, 孔数为 5×5 , 孔径 a 为 0.4 mm, 孔距横向 dx 为 2.0 mm, 纵向 dy 为 2.0 mm 的小孔列阵, 在单色光均匀照明下远场的衍射光强分布(坐标原点在孔平面中心孔上)。以单孔的非涅耳数 $N_c (= a^2/\lambda)$ 来给出孔平面到远场的距离 z , 波长 λ 取 632.8 nm, 下面给出 N_c 取 0.01, 0.005, 0.001 时根据公式(5)的计算结果, 并与文献[5]导出的公式(6)的计算结果作了比较。

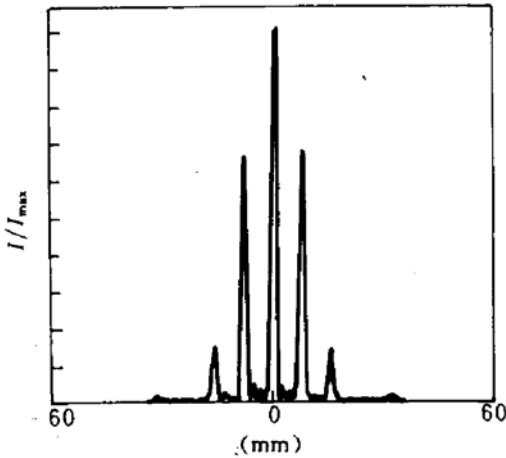


Fig. 2 $N_c = 0.01$, after ref. [5]

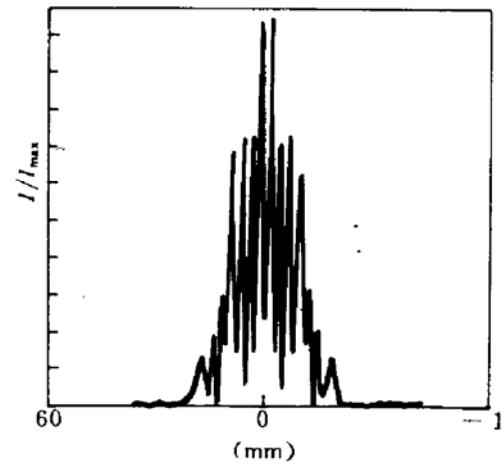


Fig. 3 $N_c = 0.01$, the calculated result of this work

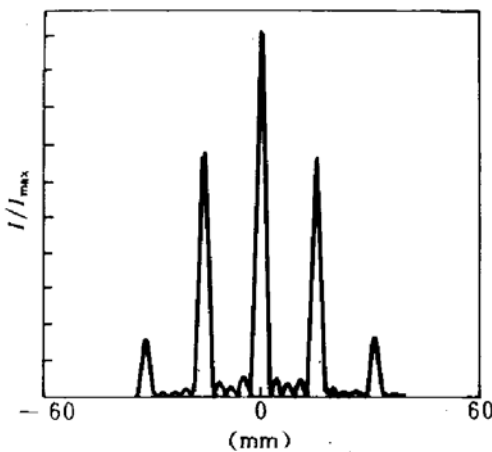


Fig. 4 $N_c = 0.005$, after ref. [5]

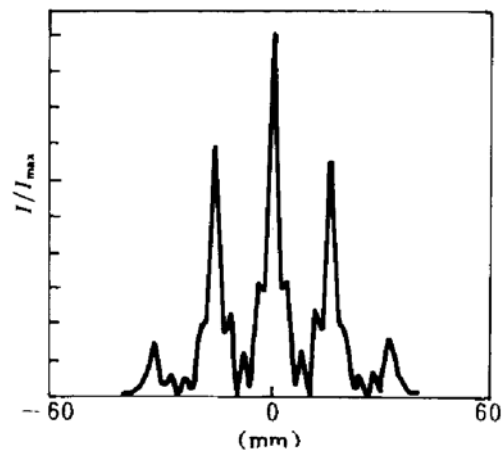


Fig. 5 $N_c = 0.005$, the calculated result of this work

由图 2, 图 4, 图 6 中可看出, 文献[5] 的公式(6) 所计算的光强分布曲线在 N_c 取 0.01, 0.005, 0.001 时没有变化, 只是其峰的半宽, 因距离的增大而展宽, 与投影成像相似, 但其成像峰经过了衍射的调制, 有一明显包络, 不为等光强。

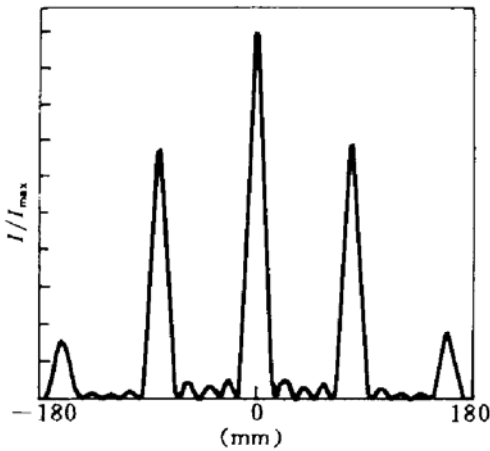


Fig. 6 $N_c = 0.001$, after ref. [5]

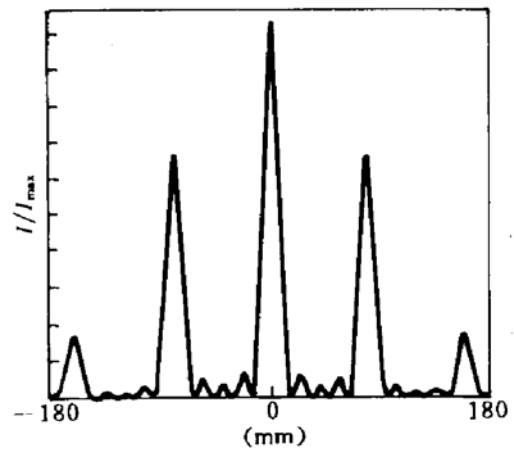


Fig. 7 $N_c = 0.001$, the calculated result of this work

图 3, 图 5, 图 7 为本文结果, 图 3 $N_c = 0.01$, 此时光强分布产生振荡, 轴上点不为光强极大值点, 即按我们的计算仍在菲涅耳衍射区, 说明小孔列阵的菲涅耳衍射区相比较于单孔时的扩展了并非如文献[5] 所示的那样。在此处成像, 成像面上只能看到一光斑。成像分辨率极差。图 5 与图 4 同是 $N_c = 0.005$, 两者有相对应的峰, 但形状有很大差别, 成像峰旁的次极大峰上升, 使其半宽加大。每个小孔的衍射叠加效果差异比较明显, 不可忽略。此处成像, 成像峰半宽较大, 信噪比较低。图 6 与图 7 同是 $N_c = 0.001$, 两者的波形基本一致, 说明在较远的远场范围, 本文计算结果与文献[5] 导出结果一致。因此在实际的列阵成像中, 要在信噪比与成像放大率中取一较佳的比值。

图 8 和图 9 分别为 $N_c = 0.005$, $N_c = 0.001$ 时 $1/4$ 像面上的光强分布。从中非常清楚地显示了小孔列阵的衍射调制, 及近远场时对列阵每个成像峰半宽的影响。

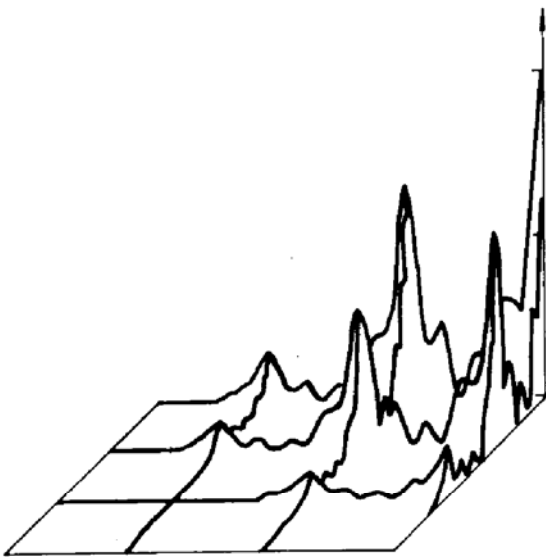


Fig. 8 $N_c = 0.005$, computer-calculated $1/4$ image plane 3-Dimensional intensity distribution

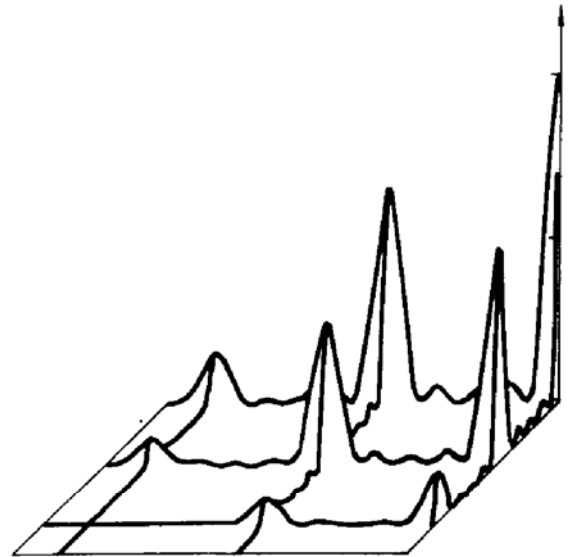


Fig. 9 $N_c = 0.001$, computer-calculated $1/4$ image plane 3-Dimensional intensity distribution

图 10 中虚线所描述的曲线为根据文献[5]所给出的光强在 z 轴的分布结果,而实线所描述的为我们计算的结果,它们清楚地显示了两种计算方法的差异。

从以上结果看出,首先,小孔列阵所成的像是经衍射调制的像。其次,对小孔列阵其远场适用条件不同于单孔,而是扩展了,但也不同于将

(4) 式中 s' 展开取一次项近似的条件,即

$$z \gg \frac{(U_n^2 + V_n^2)_{\max}}{\lambda}$$

需要重新定义。在近远场区域内其衍射光强分布的次极大峰对成像质量有很大影响,对于 5×5 的列阵,当 $N_c = 0.005$ 时,由图 8 知,其主极大峰旁的次极大峰大于其第三主极大峰。

本文的分析结果对需要高质量多像的场合(如集成电路模板制作^[1]、图像处理等^[3,4]),以及不能用普通光学系统成像的场合(X射线的编码孔成像^[2])具有指导意义。并通过简单的变换亦可推广于非相干光束和高斯光束照明的情况。

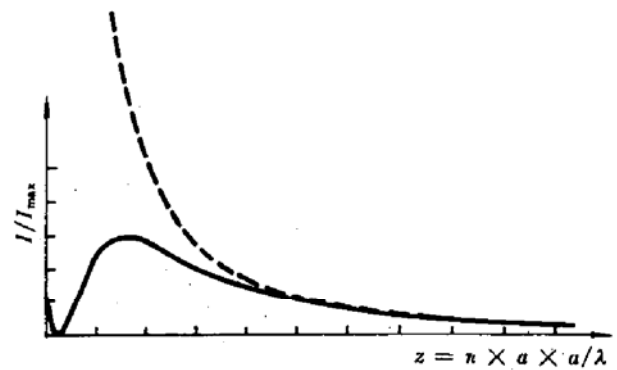


Fig. 10 Diffraction intensity distribution along z axis.

..... : result after ref. [5];
— : the result of this work

参 考 文 献

- 1 Philli A. Newman, Vincent E. Rible. Pinhole Array Camera for Integrated Circuits. *Appl. Opt.*, 1966, 5(7): 1225~1227
- 2 赵宝庆. URA 编码孔径的层析成像. *光学学报*, 1992, 12(1): 63~66
- 3 E. E. Fenimore. Coded aperture imaging; predicted performance of uniformly redundant arrays. *Appl. Opt.*, 1978, 17(22): 3562~3570
- 4 A. Senthil Kumar, R. M. Vasu. Generation of optimum random pinhole arrays for multiple imaging. *Appl. Opt.*, 1987, 26(18): 3858~3859
- 5 Max Born, Emil Wolf. *Principles of Optics*. 5th ed. New York: Pergamon Press, 1970. 513~524
- 6 Yajun Li, Helmut Platzler. An experimental investigation of diffraction patterns in low-number focusing systems. *Opt. Acta*, 1983, 30(11): 1621~1643

Intensity Distribution of Pinhole Array Far-field Diffraction

Sui Chenghua

(Physics Teaching Research Group, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014)

Wang Zhongyang Lin Qiang

(Department of Physics, Hangzhou University, Hangzhou 310028)

Abstract In this paper, the intensity distribution function of Pinhole Array diffraction of monochromatic light illuminating in Fraunhofer approximation is exactly calculated. Some new results are given, and the applicable condition of Pinhole Array far-field diffraction is described.

Key words pinhole array, monochromatic light illuminating, far-field diffraction, intensity distribution