

激光系统的不稳定性及混沌

张纪岳

(西北大学, 西安 710069)

李广庭 张自嘉

(郑州航空工业管理学院物理教研室, 郑州 450052)

提要 对于单模均匀展宽的行波激光器, 利用海森堡方程, 得到了描述 B 类激光器的 Maxwell-Bloch 方程组。利用计算机数值模拟的方法研究了泵浦参数受调制的情况。观察到一系列“正”的极限环与“倒”的混沌带的倍周期分岔序列, 以及嵌在混沌带中的 $f/3$ 周期窗口, 并计算了收敛常数 δ_n 。另外, 在此模型里, 大量存在由一个单一极限环的平凡吸引子到混沌的奇异吸引子的突变过程。还给出了部分参数区间的瞬态行为, 其稳态虽然是单一的极限环运动, 但暂态却随参数的改变呈现出准周期不稳定性及混沌的复杂运动形式。

关键词 激光, 不稳定性, 分岔, 混沌

1 引言

激光系统是一个典型的远离平衡的开放体系, 对其不稳定性及混沌的研究, 不仅对激光理论本身, 而且对非平衡理论的发展和完善都有重要意义。但是, 直接利用激光器来研究混沌不太现实^[1]。所以, 一般都是对受调制的激光器进行研究, 而且受调制的模型在实验上也不难实现。关于受调制模型的研究一般都观察到了倍周期分岔行为和混沌。文献[2]通过调节腔长从而调节激光器的失谐量, 文献[3]研究了泵浦速率受调制的固体激光器, 文献[4]研究了在坏腔条件下, 泵浦受调制的情况, 文献[5~7]则研究了腔损耗受调制的情况。本文相当于对激光器的泵浦速率进行调制, 观察到了倍周期分岔道路通往混沌的过程, 关于吸引子突变的研究及暂态行为呈现准周期不稳定性的研究在激光系统中未见报道。暂态行为呈现准周期不稳定性及混沌, 在混沌理论研究中也未见报道。

2 模型的建立及稳定性分析

对于单模均匀展宽的行波激光器, 利用海森堡方程, 并考虑到阻尼作用, 可以得到描述该类激光器的三维 Maxwell-Bloch 方程组, 然而根据第二类激光器的特点, 对极化强度作绝热近似, 可以得到如下二维速率方程组

$$\begin{cases} \frac{dE}{d\tau} = -\delta E + \delta DE \\ \frac{dD}{d\tau} = \sigma(R - D) - DE^2 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\tau = t/r_{\perp}$, $\delta = k/r_{\perp}$, $\sigma = r_{//}/r_{\perp}$, $k, r_{\perp}, r_{//}$ 分别代表腔的损耗, 纵向弛豫常数和横向弛豫常数, δ, σ 则为腔的损耗率和纵横弛豫比。 R 为泵浦速率, E, D 都是实数。分别代表场振幅和粒子数反转。

受调制模型

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= -\delta E + \delta DE \\ \frac{dD}{d\tau} &= \sigma(R - D) - DE^2 + M' \cos\Omega' \tau \end{aligned} \quad (2)$$

这相当于对泵浦速率进行调制, 其中 $M' = M/r_{\perp}$, M 为调制深度, $\Omega' = \Omega/r_{\perp}$, Ω 为调制频率。这实际相当对泵浦速率作如下变化

$$\sigma R[1 + (M'/\sigma R)\cos\Omega' \tau] = \sigma R[1 + (M/r_{//}R)\cos\Omega t]$$

即在恒定值上迭加一小的周期变化。

当 $M = 0$ 即为无调制情况, 这时方程有两组定态解:

$$\begin{aligned} \text{当 } R \leq 1 \text{ 时, } (E_0, D_0) &= (0, R) \\ \text{当 } R > 1 \text{ 时, } (E_0, D_0) &= (\sqrt{\delta(R-1)}, 1) \end{aligned} \quad (3)$$

第一组为平凡解, 没有激光输出; 第二组才是有意义的解。

对第二组解作稳定性分析, 可得本征方程

$$\lambda^2 + \sigma R \lambda + 2\sigma\delta(R-1) = 0 \quad (4)$$

本征值

$$\lambda_{1,2} = [-\sigma R \pm \sqrt{\sigma^2 R^2 - 8\sigma\delta(R-1)}]/2 \quad (5)$$

本征值 λ 满足 $\text{Re}(\lambda) = 0$, $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ 的点将对应系统的失稳点, 即 Hopf 分岔点。而由(5)式可见当 $R > 1$ 时, 总有 $\text{Re}(\lambda) < 0$, 所以, 系统不会出现 Hopf 失稳。但当 $8\delta/\sigma \gg 1$ 时, 若 $R > 2$, 则 λ 含有虚部, 即体系会有衰减型振荡, 这将影响调制模型的暂态行为。

3 数值模拟结果

对方程(2)进行数值求解, 采用的方法是四阶 Runge-Kutta-Gill 方法, 迭代时以定态作为初始值, 为求解方便, 可作适当坐标变换, 并选取 $k = 7 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$, $r_{\perp} = 10^8 \text{ s}^{-1}$, $r_{//} = 10^4 \text{ s}^{-1}$ 。

3.1 倍周期分岔及混沌

选取调制频率 $f = \Omega/2\pi = 10^{13} \text{ s}^{-1}$, 步长 0.02, 迭代结果在 E - D 平面上给出相轨道, 并对 E 作频谱分析, 给出 E 的功率谱图。

分别以 M, R 为控制参数都得到了倍周期分岔及混沌带序列。

固定 $M = 0.4$, 使 R 从大到小逐渐变化, 每变化一次进行求解一次。在变化过程中, 观察到极限环和倍周期分岔的混沌带序列, 最高阶为 $32P$ 和 $32I$, 另外还计算了比例因子 Feigenbaum 常数:

$$\delta_n = \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2}}$$

结果列于表 1。表中 P 为分岔, I 为混沌, δ_n 为收敛系数。

在 $R = 3.57$ 的混沌带中, 观察到 $f/3$ 周期窗口, 图 1、图 2 给出了 $8P$ 和 $f/3$ 周期窗口的功

率谱。

Table 1

R	Behavior	Critical value	δ_c
..... — 4.459	2P	4.4585	4.215
4.458 — 3.777	4P	3.7765	4.738
3.776 — 3.6276	8P	3.6275	
3.6275 — 3.5911	16P	3.59605	
3.596 —	32P		
..... — 3.59576	32I		
3.59575 — 3.59544	16I	3.595755	
3.59543 — 3.5939	8I	3.595435	
3.5938 — 3.5866	4I	3.59385	4.95
3.5865 —	2I	3.58655	4.608

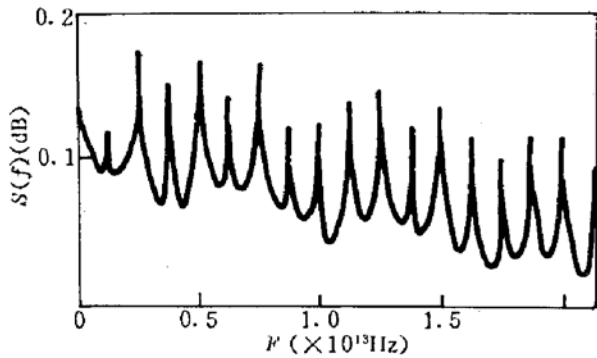


Fig. 1 8P period window, $R = 3.65, M = 0.4$

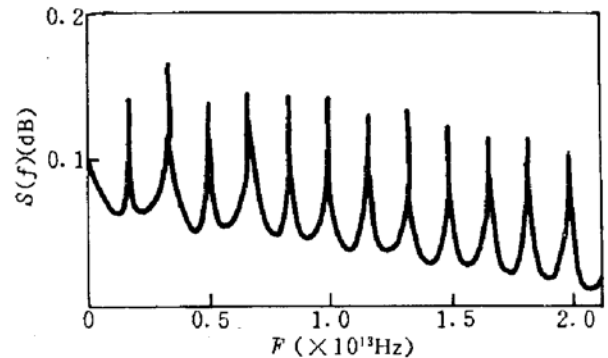


Fig. 2 $f/3$ period window, $R = 3.57, M = 0.4$

3.2 平凡吸引子到奇异吸引子的突变

固定 $R = 3, f = 10^{13} \text{ s}^{-1}$, 调节 M 由小到大变化, 当 $M = 0$ 时, 定态是稳定的。当 $M > 0$ 时产生一个光滑的极限环, 其频率为调制频率 f 。随 M 的增大, 原极限环分裂产生 $f/2$ 极限环, 此时两个极限环缠绕在一起, 经历了一次倍周期分岔过程。当 M 继续增大, 出现和前面倍周期分岔完全不同的现象, 即不产生 $f/4$ 极限环, 两个绕在一起的极限环, 内环逐渐收缩, 直到消失, 又成为一个简单的极限环, 其频率仍为 $f/2$ 。继续增大 M , 此时, 极限环直接失稳, 不再具有周期性, 而功率谱呈现一片噪声背景, 表明已进入混沌态, 图 3 给出了功率谱。

此外, 固定 $M = 0.03$, 调节 R , 也得到了类似结果, 当 $R = 2.687866$ 时, 是一个极限环, 而当 $R = 2.687865$ 时, 则进入混沌态。在其他参数区也有类似的灵敏结果。

3.3 暂态行为

固定 $R = 3.65, f = \Omega/2\pi = 8.9 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$, 调节 M 由小往大变化, 进行数值求解, 仍以定态作为初始值。

计算结果发现, 此时体系的长时间行为都呈现出单一极限环运动, 但其暂态行为却是一个复杂的运动过程, 表现出准周期不稳定性及混沌。

当 M 较小时, 相图呈现出衰减的不重复的螺旋运动, 而功率谱则有几个尖峰, 没有噪声背景。当 M 较大时, 相图没有本质变化, 但功率谱中出现较多尖峰, 且不是等间隔的。随 M 继续增

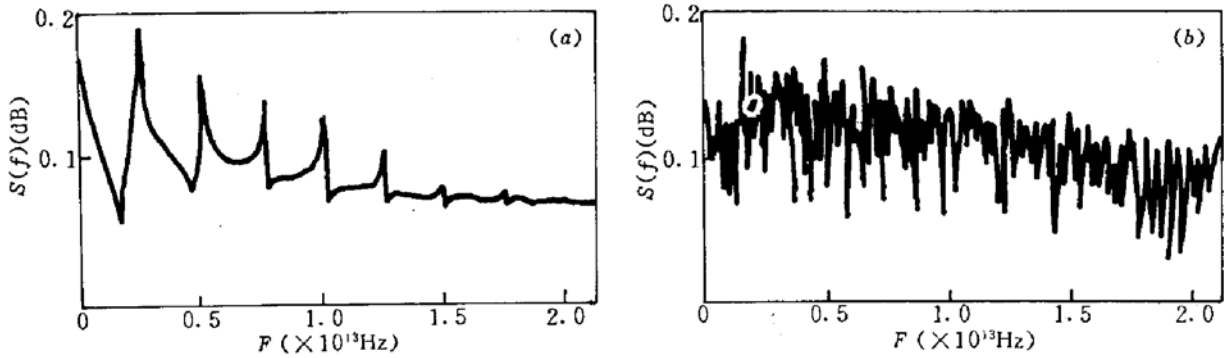


Fig. 3 (a) $f/2$ limit cycle, $M = 0.4$; (b) chaos, $M = 0.4004$

大,便出现噪声背景,说明已进入混沌态,这和准周期道路通向混沌的过程一致。图 4 用功率谱描述了以上过程。

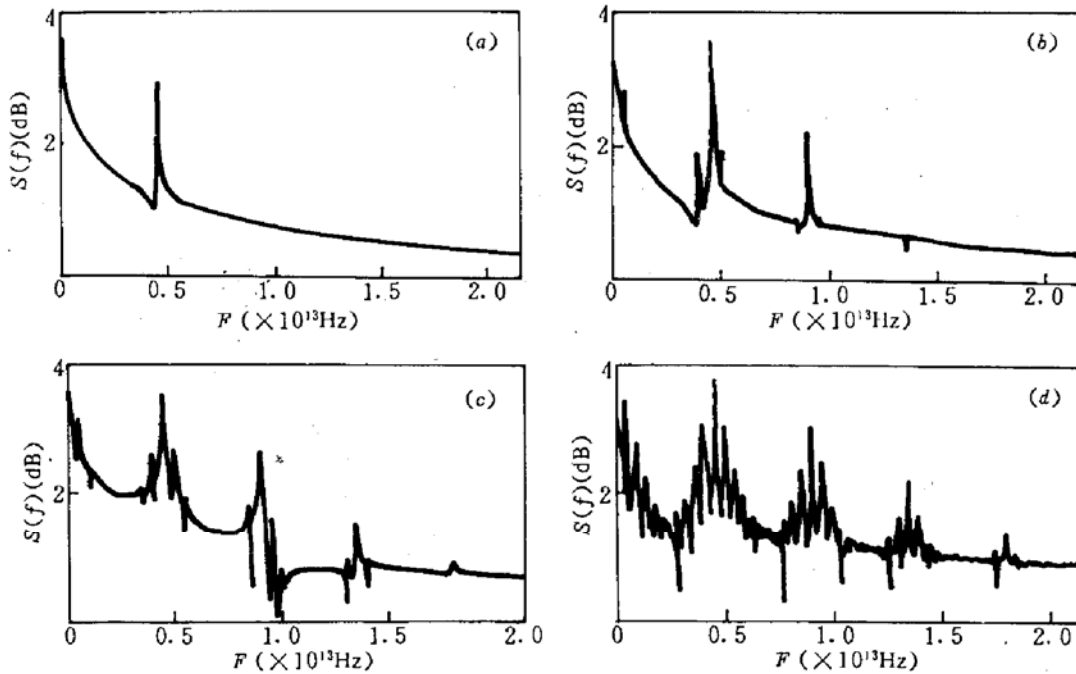


Fig. 4 The power spectrum of the temporary behavior. $R = 3.65$, $f = 8.9 \times 10^{13}$ Hz

(a) $M = 0.158$; (b) $M = 1.2$; (c) $M = 2.96$; (d) $M = 4.2$

数值计算发现,固定 R, M ,当调制频率大于某一值后,再改变 R 或 M 就不会出现倍周期分岔过程,都具有这种衰减的准周期及混沌运动形式,其稳态是单一的极限环,这和体系具有衰减型固有频率有关。至于体系只有在调制频率小于某一值后才会出现稳定的混沌运动,这和共振使体系失稳有关。

4 结果及讨论

本文用数值模拟的方法研究了第二类激光器(环形腔)的动力学行为,包括不稳定性和混沌。这类激光器包括 CO_2 激光器、红宝石激光器和 $\text{Nd}^{3+} : \text{YAG}$ 激光器等。

本文的调制模型相当于对泵浦速率进行调制,这在实验上对激光器的稳定性输出是很有

参考意义的。泵浦的不稳定性,比如周期扰动等,将对激光器的稳定输出有何影响,影响程度怎样等,从而采取适当措施稳定激光的输出。

在本文所讨论的模型里, R , M 固定其中的一个而改变另一个,都得到了类似结果,即其变化规律相同,这是由于 R 和 M 对系统作用的相对强弱所引起的必然结果。另外,调制频率大于或小于某个频率范围之后,系统不再出现稳定的分岔和混沌行为,这和共振才能使体系失稳有关。

参 考 文 献

- 1 N. B. Abraham, L. A. Lugiato, L. M. Narducci. *J. Opt. Soc. Am.*, 1985, **B2**: 7
- 2 J. R. Tredice *et al.*. *Phys. Rev. A*, 1986, **34**(3): 2073
- 3 A. C. Maciel, P. Maly, J. F. Ryan. *Phys. Rev. A*, 1989, **39**(10): 5455
- 4 Tetsuo Ogawa. *Phys. Rev. A*, 1988, **37**(11): 4286
- 5 F. T. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni *et al.*. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **49**(17): 1217
- 6 王海达. 量子电子学, 1986, **3**(3): 235
- 7 D. Dangoisse, P. Glorieux, D. Hennequin. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**: 2657

Instabilities and Chaos in Laser System

Zhang Jiyue

(Northwest University, Xian 710069)

Li Guangting Zhang Zijia

(Zhengzhou Aeronautical Institute of Industrial Management, Zhengzhou 450052)

Abstract The Maxwell-Bloch equations describing the class-B lasers were obtained by the Hisenberg equation for the single-mode homogenously broadened travelling laser. The laser system, in which the modulated pump intensity was studied in detail. By numerical calculation, the sequence of positive period-doubling vifurcation and the sequency of reverse chaotic band were observed. In the chaotic band, some of the period windows were found. The temporary behavior of the system was in quasi-period instabilities and chaos motion. In some regions of the parameters, the system lost its stabilities and directly transited into chaos from one limit cycle.

Key words laser, instability, bifurcation, chaos