

# 光场与振子(boson元激发)的耦合

——一种新的激光模型\*

欧发 魏宝华

刘翠红

(华南理工大学应用物理系, 广州 510641)

(广州师范学院物理系, 广州 510400)

**提要** 提出了一种起源于光场与振子(boson元激发)之间非线性耦合的激光模型。详细地论证了该激光器的阈值行为, 它和光场与二能级原子耦合的激光一样, 具有典型的二级相变特征。

**关键词** 激光, 光场, 振子, 玻色子, 元激发

## 1 引言

在光与物质相互作用的研究中, 二能级原子是一个十分简化而有用的物质模型, 发挥了很重要的作用<sup>[1]</sup>。人们用二能级原子模型来描述激光作用(参见有代表性的3个激光物理学派: W. Lamb Jr<sup>[2]</sup>, H. Haken<sup>[3]</sup>, M. Lax 与 W. Louisell<sup>[4]</sup>)以及后来的光学双稳性(OB)(R. Bonifacio 与 L. A. Lugiato 等<sup>[5,6]</sup>)。光与二能级原子的耦合所引起的光学非线性具有饱和吸收(SA)的特性<sup>[2~5]</sup>。因此, 它不能说明增强吸收型光学双稳性(IAOB)<sup>[7]</sup>。可以回想一下 Planck 在解释黑体辐射时所用的物质模型<sup>[8]</sup>: 他将黑体代之以具有大数的简谐振子(simply periodic oscillator)集合(系统)。继而提出振子发射或吸收能量的量子化假设。用现在的眼光来看, 谐振子的激发态正是 boson 元激发。故 Planck 的这种物质的振子模型又可称为 boson 元激发模型。正是回到 Planck 的物质模型, 我们在文献[7]中考虑了 IAOB 的机制, 发现它可以是光与 boson 元激发之间非线性相互作用的结果。本文进一步试图说明这种耦合所产生的激光作用。

## 2 光场与振子耦合的 Hamiltonian(单模)

光场与 boson 物质相耦合的系统的 Hamiltonian 一般地可表达成<sup>[7]</sup>(为简单起见, 只考虑光场与振子均为单模的情况)。

$$H = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b + i\hbar g(\pi^\dagger a - \pi a^\dagger) \quad (1)$$

$$\pi^\dagger = b^\dagger(1 + \lambda b^\dagger b), \quad \pi = (1 + \lambda b^\dagger b)b \quad (2)$$

其中 $(a^\dagger, a)$ 系频率为 $\omega_a$ 的光场模式算符,  $(b^\dagger, b)$ 系物质的振子模式算符(其频率 $\omega_b$ 接近于 $\omega_a$ ),

\* 国家自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1993年6月21日, 收到修改稿日期: 1993年9月9日

与光场算符一样服从 boson 对易关系。而  $(\pi, \pi^+)$  则应理解为物质的极化<sup>[9]</sup>。 $g$  与  $g\lambda$  分别为光场和振子之间的线性与非线性耦合常数。从光与物质相互作用的基本原理出发, 可以分别证明, (1) 式所表达的 Hamiltonian 中的 boson 元激发可以是离子晶体中的光频支声子<sup>[9]</sup>, 也可以是半导体中在低载流子密度下形成的 Wannier 激子<sup>[10]</sup>。若将 Pauli 算符  $(\sigma_3, \sigma_+, \sigma_-)$  依次取代(1)式中的  $(b^+b, \pi^+, \pi)$ , (1) 式就变成光场与二能级原子耦合的 Hamiltonian。

### 3 运动方程, 能量的相干与非相干注入

在适当的近似下, 并且唯像地加入耗散以及相干与非相干能量注入项, 由 Hamiltonian (1) 式可导出如下的运动方程<sup>[7]</sup>——光场-振子耦合方程

$$\dot{\varepsilon} = -[\gamma_e + i(\omega_e - \omega)]\varepsilon - g(1 + \lambda|e|^2)e + \gamma_e \varepsilon_i \quad (3)$$

$$\dot{e} = [\Gamma - \gamma_e - i(\omega_e - \omega)]e + g[(1 + 2\lambda|e|^2)\varepsilon - \lambda e^2 \varepsilon^*] \quad (4)$$

其中  $\varepsilon$  与  $e$  (及其复共轭) 分别为光场算符  $a$  与振子算符  $b$  (及其厄米共轭  $a^+$  与  $b^+$ ) 期望值的复振幅:

$$\langle a \rangle = \varepsilon(t) \exp(-i\omega t), \quad \langle a^+ \rangle = \langle a \rangle^* \quad (5)$$

$$\langle b \rangle = e(t) \exp(-i\omega t), \quad \langle b^+ \rangle = \langle b \rangle^* \quad (6)$$

这里  $\omega$  为入射光场  $\varepsilon_i$  的频率。在上面提到的近似中, 忽略变量间的关联, 于是有乘积的平均值等于各因子的平均乘积, 例如

$$n_e = \langle a^+ a \rangle = \langle a^+ \rangle \langle a \rangle = \varepsilon^* \varepsilon \quad (7)$$

$$n_s = \langle b^+ b \rangle = \langle b^+ \rangle \langle b \rangle = e^* e \quad (8)$$

这里  $n_e$  是光场的量子(光子)数,  $n_s$  则为振子的激发态量子(boson 元激发)数。在以后的方程(12)与(13)中,  $n_e$  与  $n_s$  正分别代表各自的能量贮存。另一方面, 极化算符  $(\pi, \pi^+)$  的期望值为

$$\begin{aligned} \langle \pi \rangle &= \langle (1 + \lambda b^+ b) b \rangle = (1 + \lambda \langle b^+ b \rangle) \langle b \rangle \\ &= (1 + \lambda |e|^2) e \exp(-i\omega t), \quad \langle \pi^+ \rangle = \langle \pi \rangle^* \end{aligned} \quad (9)$$

$(1 + \lambda |e|^2)e$  正是极化的振幅:

$$P = (1 + \lambda |e|^2)e, \quad P^* = (1 + \lambda |e|^2)e^* \quad (10)$$

(3) 式中  $\gamma_e \varepsilon_i$  是相干性驱动项(入射光场),  $-\gamma_e \varepsilon$  则为光场的耗散项, (3) 式(及其复共轭)正和代表光与二能级原子耦合的 Maxwell-Bloch 方程中的(光)场方程完全一致<sup>[2~4]</sup>, 也就是说, (3) 式正是慢包络并取空间平均近似下的 Maxwell 方程。而(4)式(及其复共轭)作为振子(物质)方程, 正和二能级原子(物质)的 Bloch 方程相对应(但两者并不相同)。其中  $\gamma_e$  代表振子模式的衰变率(耗散),  $\Gamma$  则为抽运速率(能量的非相干注入), 代表耗散的反过程。将方程(3)与(4)化成振幅与相位方程就可以更清楚地说明能量的相干与非相干注入以及其它能量交换问题。令  $\varphi_e, (\varphi_s)$  代表光场(振子)相对入射场的相位(后者可定为零):

$$\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\varphi_e} = \sqrt{n_e} e^{i\varphi_e}, \quad e = |e| e^{i\varphi_s} = \sqrt{n_s} e^{i\varphi_s} \quad (11)$$

由(3)与(4)式得

$$dn_e/dt = -2\gamma_e n_e - 2g(1 + \lambda n_s) \sqrt{n_e n_s} \cos(\varphi_e - \varphi_s) + 2\gamma_e \varepsilon_i \sqrt{n_e} \cos \varphi_e \quad (12)$$

$$dn_s/dt = -2\gamma_s n_s + 2g(1 + \lambda n_s) \sqrt{n_e n_s} \cos(\varphi_e - \varphi_s) + 2\Gamma n_s \quad (13)$$

$$d\varphi_e/dt = -i(\omega_e - \omega) + g(1 + \lambda n_s) \sqrt{n_e/n_s} \sin(\varphi_e - \varphi_s) + \gamma_e (\varepsilon_i / \sqrt{n_e}) \sin \varphi_e \quad (14)$$

$$d\varphi_e/dt = -i(\omega_e - \omega) + g(1 + 3\lambda n_e) \sqrt{n_e/n_e} \sin(\varphi_e - \varphi_e) \quad (15)$$

振幅方程(12)与(13)(即量子数  $n$  速率方程)实际上是能量平衡方程,(12)与(13)式的右方中间项相同而符号相反,显然代表光场与振子之间的能量的交换(振子受激吸收或发射光子)。  $-2\gamma_e n_e$  与  $-2\gamma_e n_e$  分别表示光场与振子向外部(热库)的能量耗散(阻尼)。(12)式右边的最后一项。

$$P_{\text{con.}} = 2\gamma_e \varepsilon_i |\varepsilon| \cos\varphi_e \quad (|\varepsilon| = \sqrt{n_e}) \quad (16)$$

是单位时间内入射场  $\varepsilon_i$  所做的功,由于它和一个确定的相位差,即光场模式  $\varepsilon$  与入射场  $\varepsilon_i$  之间的相位差  $\varphi_e$  有关,清楚地表明它代表一种相干性能量注入。(13)式的最后一项

$$P_{\text{uncoh.}} = 2\Gamma n_e = 2\Gamma |e|^2 \quad (17)$$

是直接输给振子的功率,与相位无关的非相干性能量输入。 $-2\gamma_e n_e$  包括自发发射和无辐射的振子向低能态的跃迁,而  $2\Gamma n_e$  乃抽运系统激发振子向高能态的无辐射跃迁(参照图 1)。抽运速率  $\Gamma$  对于控制激光的产生起特别重要的作用。

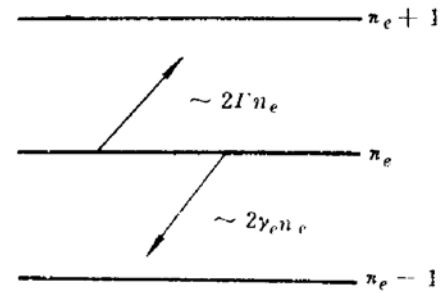


Fig. 1 Uncoherent transitions of oscillator

### 4 激光方程的静态解与线性稳定性分析

静态情形下的(12)与(13)式( $dn_e/dt = dn_e/dt = 0$ )表明,只要  $\Gamma > \gamma_e$ ,就有净受激发射功率  $P_e$ 。

$$P_e = -2g(1 + \lambda n_e) \sqrt{n_e n_e} \cos(\varphi_e - \varphi_e) > 0 \quad (18)$$

这也就保证了输出光功率  $2\gamma_e n_e$  大于输入信号  $\varepsilon_i$  功率  $P_{\text{con.}}$  [见(16)式],这正是广义上的“光被受激发射的辐射放大”(LASER)作用。而我们特别感兴趣的是无注入信号的激光作用及其阈行为。因此假定入射光场为零( $\varepsilon_i = 0$ ),同时,我们考虑纯共振的情况

$$\omega_e = \omega_e = \omega \quad (19)$$

在这种情况下,即  $\varepsilon_i = 0$  及  $\omega_e = \omega_e$ ,一旦达到静态( $\dot{n}_e = \dot{n}_e = \dot{\varphi}_e = \dot{\varphi}_e = 0$ ),根据(12)~(15)式,可判断

$$\varphi_e - \varphi_e = \pi, \quad (\text{又令 } \varphi_e = 0, \text{ 则 } \varphi_e = -\pi) \quad (20)$$

也就是说,光场与振子可以锁定在相反的相位。因此,这时光场振幅  $\varepsilon$  与振子振幅  $e$  均可视为实数:

$$\varepsilon = |\varepsilon| = \sqrt{n_e}, \quad \text{但 } e = -|e| = -\sqrt{n_e} \quad (21)$$

于是(3)式与(4)式可简化为两个实数方程

$$\dot{\varepsilon} = -\gamma_e \varepsilon - g(1 + \lambda \varepsilon^2)e \quad (22)$$

$$\dot{e} = (\Gamma - \gamma_e)e + g(1 + \lambda \varepsilon^2)\varepsilon \quad (23)$$

这正是单模与纯共振情况下的光场与振子耦合的激光方程组。其静态方程( $\dot{\varepsilon} = \dot{e} = 0$ )可表达为

$$\varepsilon = -g(1 + \lambda \varepsilon^2)e/\gamma_e = -\frac{(\Gamma - \gamma_e)e}{g(1 + \lambda \varepsilon^2)} \quad (24)$$

显然有两种静态解:

(I)  $e = 0$ , 因而  $\varepsilon = 0$  (25)

(II)  $e^2 = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{\sqrt{(\Gamma - \gamma_e)\gamma_e}}{g} - 1 \right]$  (26)

以及  $\varepsilon^2 = \frac{(\Gamma - \gamma_e)}{\gamma_e \lambda} \left[ \frac{\sqrt{(\Gamma - \gamma_e)\gamma_e}}{g} - 1 \right]$  (27)

$e^2$  与  $\varepsilon^2$  必须取正值, 因此, 只有当

$$\sqrt{(\Gamma - \gamma_e)\gamma_e}/g > 1, \text{ 即 } \Gamma > g^2/\gamma_e + \gamma_e \equiv \Gamma_{th} \quad (28)$$

时才存在  $e^2 \neq 0$  和  $\varepsilon^2 \neq 0$  的解, 也就是说抽运速率  $\Gamma$  超过某一数值  $\Gamma_{th}$  时, 才会出现激光, 这正反映激光器的典型阈值行为。

为了确认这种激光的阈值行为能够实现, 有必要对方程(22)与(23)作(线性)稳定性分析。(在未做稳定性分析以前, 至少不能肯定  $\Gamma$  超过阈值后,  $e = 0$  以及  $\varepsilon = 0$  的解是否还可能存在。)而且, 由此分析我们将进一步得到光场-振子模型激光器特有的动力学性质。关于线性稳定性分析的细节, 将放在附录 A 中备考, 下面只列出分析的结果:

4.1  $e = 0$  以及  $\varepsilon = 0$  定态的稳定性条件为

(I)  $\Gamma < \gamma_e + \gamma_c$  (29)

(II)  $\Gamma < g^2/\gamma_e + \gamma_e = \Gamma_{th}$  (30)

4.2  $e^2 \neq 0$  以及  $\varepsilon^2 \neq 0$  定态稳定性条件为

(I)  $\gamma_e + G - 2G_{th} \sqrt{G/G_{th}} > 0 \quad (G \equiv \Gamma - \gamma_e)$  (31)

(II)  $\Gamma > g^2/\gamma_e + \gamma_e = \Gamma_{th}$  (32)

((31) 式中定义的  $G$  可代表一种净增益, 因为  $\gamma_e$  是损耗)。首先, 有必要弄清楚(31)式这个条件的含义。设  $\Gamma$  略微超过  $\Gamma_{th}$ , 即

$$\Gamma = \Gamma_{th} + \Delta \text{ 或 } G = \Gamma_{th} - \gamma_e + \Delta = G_{th} + \Delta, \text{ 而 } 0 < \Delta < G_{th} \quad (33)$$

将(31)式中的根号式作展开

$$\sqrt{\frac{G}{G_{th}}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta}{G_{th}}} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta}{G_{th}} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{\Delta}{G_{th}} \right)^2 + \dots \quad (34)$$

于是, 条件(31)式就变成一个含义比较明确的表达式

$$\gamma_e - G_{th} + \frac{1}{4} \frac{\Delta^2}{G_{th}} \dots > 0 \quad (35)$$

由于  $\Delta$  可以任意小, 这个条件实际上是

$$\gamma_e - G_{th} = \gamma_e - g^2/\gamma_e > 0, \text{ 即 } \gamma_e > g \quad (36)$$

有了条件(36)以及(30), 条件(29)就成为多余。将上述稳定性分析的结果用图 2 来表述。 $\varepsilon^2(e^2)$  对  $\Gamma$  的曲线中, 实线代表线性稳定解, 而沿  $\Gamma$  轴的虚线则代表不稳定解。请注意, 阈点  $\Gamma_{th}$  同样也不满足线性稳定性条件(32)或(30), 这正是在严格定义下的临界点<sup>[11]</sup>。

以后将证明, 该点和二能级原子激光模型的临界点一样, 标志一种连续(二级)相变, 并且是临界稳定的。

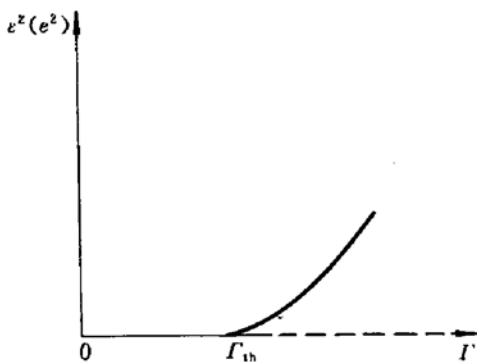


Fig. 2 Coherent output  $\varepsilon^2$  vs pumping rate  $\Gamma$  curve in the oscillation model of laser  
— : stable solving; --- : unstable solving

先讨论一下阈值  $\Gamma_{th}$  的表达式(28)和线性稳定条件(36),把两者综合起来有

$$\Gamma_{th} = g^2/\gamma_e + \gamma_e, \quad \gamma_e > g \quad (\text{稳定性的要求}) \quad (37)$$

以上两表达式清楚地说明,稳定性条件要求光场模式采取足够高的衰变率  $\gamma_e$ ,而提高了  $\gamma_e$ ,相应阈值  $\Gamma_{th}$  也得到降低,使得该激光系统更容易起振。高  $\gamma_e$  意味腔的输出端的高透射率(低反射率)。因此,以光场-振子为本征耦合的激光器,将和增强吸收型光学双稳系统一样,不需要反射镜这样的外部反馈设施<sup>[6]</sup>。这是有别于二能级原子模型激光器的一大特点。代表二能级原子模型激光器的抽运强度为未饱和的反演  $D_0$ ,它的阈值  $(D_0)_{th}$  应为<sup>[3,4]</sup>

$$(D_0)_{th} = \gamma_e \gamma_{\perp} / g^2 \quad (38)$$

这里的  $g$  与  $\gamma_{\perp}$  分别是光场和原子的耦合常数及横向弛豫率。(38)式表明:光场模式的弛豫率  $\gamma_e$  愈低则阈值  $(D_0)_{th}$  愈低,因此,二能级原子模型的激光器需要优质腔,而劣质腔对振子模型激光器正适用。

## 5 二级相变

远离热平衡系统的 Fokker-Planck 方程满足细致平衡原理,就存在包含在统计分布  $f$  静态解中的所谓准热力学势  $\tilde{F}$ <sup>[12]</sup>

$$f \sim \exp(-2\tilde{F}/Q), \quad (Q \text{ 为涨落常数}) \quad (39)$$

无色散的光学非线性(包括饱和吸收型和增强吸收型)耗散系统,一般还要经过绝热近似,可以满足细致平衡的条件<sup>[11,12]</sup>。这里不准备重复以前证明的步骤,而是用一种简单的方法导出准热力学势  $\tilde{F}$ 。取绝热近似条件为

$$\gamma_e \gg \gamma_e \quad (40)$$

这可以与低阈值以及稳定性的要求相符(参见(37)式)。据此,从(23)式绝热消除掉场变量  $e$ ,得

$$\dot{e} = (\Gamma - \gamma_e)e - g^2(1 + \lambda e^2)^2 e / \gamma_e \quad (41)$$

这正是振子的自持振荡方程,其中  $g^2(1 + \lambda e^2)^2 / \gamma_e$  正是相干辐射(受激发射)阻尼的速率(自发发射引起的阻尼则包括在  $\gamma_e$  中),代表能量耦合到激光光场的速率(参见(12),(13)式)。可以证明<sup>[3,12]</sup>, (39)式中的势  $\tilde{F}$  满足

$$\dot{e} = -(\partial \tilde{F} / \partial e) \quad (42)$$

通过对(41)式作简单积分并略去  $e^6$  项,得到临界点附近的势  $\tilde{F}$

$$\tilde{F} = (G_{th} - G)e^2/2 + (b/4)e^4 \quad (43)$$

其中

$$G_{th} = g^2/\gamma_e, \quad b = 2\lambda g^2/\gamma_e \quad (44)$$

$\tilde{F}$  将给出稳定性判据:静态若为稳定,必有

$$\partial^2 \tilde{F} / \partial e^2 = G_{th} - G + 3be^2 > 0 \quad (45)$$

这和对未经过绝热近似前的方程组(22)与(23)作线性稳定性分析的结果一致。(然而,绝热近似丢掉了  $\gamma_e > g$  这样的稳定性条件。以上请参考(29)~(36)式)对于失去线性稳定性的临界点( $G = G_{th}, e = 0$ )

$$\partial^3 \tilde{F} / \partial e^3 = 0 \quad (46)$$

它的稳定性则由下面两个条件来决定

$$\partial^3 \tilde{F} / \partial e^3 = 0 \text{ 及 } \partial^4 \tilde{F} / \partial e^4 (= 3!b) > 0 \quad (47)$$

显然, 阈点( $G = G_{th}, e = 0$ ) 是稳定的。

(43)式是 Landau 二级相变理论的典型表达。人们早先(Graham 与 Haken<sup>[13]</sup> 以及 Degiorgio 与 Scully<sup>[14]</sup>(1970))是以二能级原子模型为基础, 得到与(43)式相似的结果。在二能级原子情况, 由于绝热消除了原子变量, (43)式中作为序参量的振子变量  $e$  应代之以场变量  $\varepsilon$ , 相应的势  $\tilde{F}$  应为

$$\tilde{F} = (G_{th} - G)\varepsilon^2/2 + (b/4)\varepsilon^4 \quad (48)$$

其中 
$$G_{th} = \frac{g^2(D_0)_{th}}{\gamma_{\perp}}, \quad G = \frac{g^2 D_0}{\gamma_{\perp}}, \quad b = \frac{4g^2 G_{th}}{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}} \quad (49)$$

虽然, 振子模型与二能级原子模型的动力学特征有很大的差异, 而激光的阈值行为却很相似。进一步说明起源于不同形式相互作用的临界现象与相变具有共同的规律性, 作为远离热平衡的激光系统也不例外。

### 参 考 文 献

- 1 李福利. 高等激光物理学, 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1992
- 2 M. Sargent II, M. O. Scully, W. E. Lamb. Jr. . Laser Physics, Addison-Wesley, Reading, M A 1974
- 3 H. Haken. Laser Light Dynamics, Light, Vol. 2 North-Holland, 1985
- 4 W. H. Louisell. Quantum Statistical Properties of Radiation, John Wiley, 1973, 中译本, 北京: 科学出版社, 1982
- 5 R. Bonifacio, L. A. Lugiato. Theory of Optical Bistability, in Dissipative Systems in Quantum Optics, Ed. R. Bonifacio, Springer-Verlag, 1982
- 6 H. M. Gibbs. Optical Bistability: Controlling Light with Light, Academic Press, 1985
- 7 Fa Ou. Z. Phys. B, 1992, 88(1): 117
- 8 Max Planck. Theory of Heat, Introduction to Theoretical Physics Vol. 5, (translated English edition printed in great Britain, Trans. H. L. Brose) Richard Clay and Sons, 1932
- 9 Fa Ou et al. . SPIE, 1992, 1726: 380
- 10 M. L. Steyn-Ross, C. W. Gardiner. Phys. Rev. A, 1983, 27: 310
- 11 H. Haken. Advanced Synergetics, Springer-Verlag, Berlin, 1983
- 12 欧 发. 物理学报, 1992, 41(8): 1222
- 13 R. Graham, H. Haken. Z. Phys., 1970, 237: 31
- 14 V. Degiorgio, M. O. Scully. Phys. Rev., 1970, A2: 1170

## Lightfield-oscillator Coupling

—— A New Model of Laser

Ou Fa Wei Baohua

(Department of Applied Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

Liu Cuihong

(Physics Department, Guangzhou Teachers' College, Guangzhou 510400)

**Abstract** This paper provides a model of laser action due to the nonlinear coupling between lightfield and oscillator (boson elementary excitation in medium). The threshold behavior of

this kind of laser is demonstrated in detail, which possesses the typical feature of the second-order transition as that of the laser model associated with the interaction of lightfield and two-level atoms.

**Key words** laser, light field, oscillator, boson, elementary excitation

## 附录 A 线性稳定性条件的推导

令  $\Delta e$  与  $\Delta \varepsilon$  代表对静态的偏离, 并设它们按以下指数规律衰减

$$\begin{pmatrix} \Delta e \\ \Delta \varepsilon \end{pmatrix} \sim \exp(-\alpha t), \quad (\text{系数 } \alpha > 0 \text{ 意味该静态稳定}) \quad (A1)$$

将此取代方程(22)与(23)中的变量  $e$  与  $\varepsilon$ , 并只保留线性项, 得

$$-\alpha \Delta \varepsilon = -\gamma_e \Delta \varepsilon - g(1 + 3\lambda e^2) \Delta e \quad (A2)$$

$$-\alpha \Delta e = g(1 + \lambda e^2) \Delta \varepsilon + [G - (2g^2/\gamma_e)\lambda(1 + \lambda e^2)e^2] \Delta e \quad (A3)$$

(请注意, (A2) 与 (A3) 以及以下的  $\varepsilon$  与  $e$  均代表静态值) 相应得如下的特征方程

$$(\alpha - \gamma_e)[\alpha + G - (2g^2/\gamma_e)\lambda(1 + \lambda e^2)e^2] + g^2(1 + 3\lambda e^2)(1 + \lambda e^2) = 0 \quad (A4)$$

可由此得到

$$\alpha = b/2(1 \pm \sqrt{1 - 4c/b^2}) \quad (A5)$$

其中

$$b = \gamma_e - G + \frac{2g^2}{\gamma_e}\lambda(1 + \lambda e^2)e^2 \quad (G = F - \gamma_e) \quad (A6)$$

$$c = g^2(1 + 3\lambda e^2)(1 + \lambda e^2) + 2g^2\lambda(1 + \lambda e^2)e^2 - \gamma_e G \quad (A7)$$

为保证

$$\alpha > 0 \quad (A8)$$

必须有 (I)  $b > 0$ , (II)  $c > 0$

由此分别得到正文中的  $e^2 = 0$  和  $e^2 \neq 0$  静态稳定性条件(要参考(25)~(28)式)。