

狭激光束运动所致到达角起伏概率和光强起伏统计

张逸新

(无锡轻工业学院机械系, 无锡 214036)

提要 运用到到达角起伏的马尔柯夫近似和湍流大气中传输光束的几何光学近似, 导出了满足奥伦斯坦-乌伦贝克过程的到达角起伏概率密度的福克-普朗克方程, 得到了与传输路程相关的到达角起伏 Rician 分布概率密度函数, 同时讨论了狭激光束到达角起伏导致的光强起伏统计问题。

关键词 激光传输, 到达角起伏, 概率, 闪烁

1 引 言

随着激光应用的不断扩展, 激光束在湍流大气中传播时所反映出的传播特性显得越来越重要。对激光大气传输而言, 光强起伏和光束束形畸变是两个影响传输光束质量的十分重要的参数。大气湍流导致的到达角起伏(像心起伏)是影响光学系统检测光强起伏和光束等效束径的主要因素之一。所以到达角起伏概率是一个值得研究的问题^[1]。本文运用到到达角起伏的马尔柯夫过程近似和梯度折射率光学成像理论研究到达角起伏概率以及到达角起伏引起的光强起伏概率。

2 到达角起伏的概率描述

从激光在大气中传输的研究可知^[2], 光束到达角起伏是由大气湍流引起光束波阵面的畸变所致。由湍流场的诸如湍流扩散等特征我们又可得知因风速、温度和湿度的逐时逐点随机变化将致使近地面大气折射率也是一个逐时逐点的随机变量。所以我们可以认为在任一选定的正交坐标系中光束沿每一坐标轴的到达角起伏间是统计独立的, 为方便起见我们以垂直于地平面和传输方向的轴上光束到达角起伏为研究对象。

设 $\mathcal{P}(l, \theta)$ 表示光束在距发射端为 l , 到达角为 θ 处的概率密度, 从 l_1 位置到 l 位置相应各点的联合概率密度记为 $\mathcal{P}(l_1, \theta_1; l_2, \theta_2; \dots; l, \theta)$ 。由湍流场特征和到达角起伏的研究可以认为在 l 位置的到达角仅受 l_{-1} 位置时光束的到达角的影响, 可用马尔柯夫过程近似描述到达角起伏。那么由随机过程理论, 到达到角起伏的联合概率密度简化为转移概率^[3], 即

$$\mathcal{P}_{(n-1)/1}(l_1, \theta_1; l_2, \theta_2; \dots; l_{n-1}, \theta_{n-1}/l_n, \theta_n) = \mathcal{P}_{1/1}(l_{n-1}, \theta_{n-1}/l_n, \theta_n) \quad (l_1 < l_2 < \dots < l_n) \quad (1)$$

而且到达角起伏过程完全由 $\mathcal{P}_1(l, \theta)$ 和 $\mathcal{P}_{1/1}(l_1, \theta_1/l_2, \theta_2)$ 两个函数确定。光束位于 l_2 和到达角坐标为 θ_2 的概率密度则为

$$\mathcal{P}_1(l_2, \theta_2) = \int \mathcal{P}_1(l_1, \theta_1) \mathcal{P}_{1/1}(l_1, \theta_1/l_2, \theta_2) d\theta_1 \quad (2)$$

在归一化条件 $\int \mathcal{P}_{1/1}(l_1, \theta_1/l_2, \theta_2) d\theta_2 = 1$ 的约束下, 微分(2)式得到

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1(l, \theta_2)}{\partial l} = \int d\theta_1 \{W(\theta_1; \theta_2) \mathcal{P}_1(\theta_1, l) - W(\theta_2; \theta_1) \mathcal{P}_1(\theta_2, l)\} \quad (3)$$

其中 $W(\theta_1, \theta_2)$ 是光束角位置从状态 θ_1 变到 θ_2 的单位距离条件概率密度。

由于大尺度湍流的光折射效应和小尺度湍流的光闪烁效应使得描述光束角位置的变量 θ 是一个连续变量, 同时 θ 的改变 $\Delta\theta$ 是以小跃变的方式累积进行的, 这也表明单位距离转移概率 $W(\theta'; \theta)$ 随 $|\xi| = |\theta - \theta'|$ 的增大而迅速下降, 记

$$W(\theta'; \theta) = W(\theta'; \theta - \theta') = W(\theta'; \xi) \quad (4)$$

于是(3)式改写为

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1(\theta, l)}{\partial l} = \int d\xi W(\theta - \xi; \xi) \mathcal{P}_1(\theta - \xi, l) - \mathcal{P}_1(\theta, l) \int W(\theta; -\xi) d\xi \quad (5)$$

将乘积 $W(\theta - \xi; \xi) \mathcal{P}_1(\theta - \xi, l)$ 按 ξ 的幂次展开, 得到 $\mathcal{P}_1(\theta, l)$ 的福克-普朗克方程

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1(\theta, l)}{\partial l} = - \frac{\partial}{\partial \theta} [\alpha_1(\theta) \mathcal{P}_1(\theta, l)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\alpha_2(\theta) \mathcal{P}_1(\theta, l)] \quad (6)$$

其中 $\alpha_n(\theta)$ 是单位距离内的第 n 级跃变矩

$$\alpha_n(\theta) = \int d\xi \xi^n W(\theta; \xi) \quad (7)$$

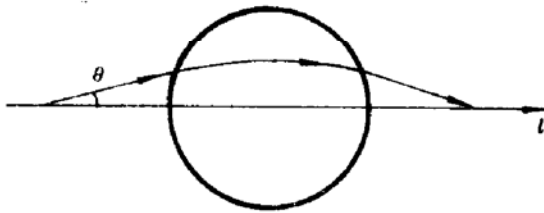


Fig. 1 Ray propagation in generalization
Luneburg lens

为了进一步分析方程(6), 下面研究 $\alpha_1(\theta)$ 和 $\alpha_2(\theta)$ 的具体形式。我们把湍流大气看成是由大量无规则排列的广义 Luneburg 透镜^[4]所构成, 光束在 Luneburg 透镜内的传播规律见图 1。由于我们研究的是光束到达接收面处光束到达角起伏概率, 那么那些在传输途中因湍流散射远离主光线的光线不再考虑, 所以仅分析光束限于湍流中心

位于传输线附近邻域内的湍流层中的传播, 这种假设与光线传输小角度前向散射假定是一致的。由于光线弯向湍流折射率高的一边^[4], 则在单位距离内的到达角跃变统计平均为^[5]

$$\alpha_1 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\int d\xi \xi \mathcal{P}_1(\theta, \xi)}{\Delta l} = -k\theta + \theta_0/l \quad (8)$$

其中 k 是比例系数, θ_0 是由于地表加热或冷却造成的平行地表的分层大气折射率梯度变化引入到达角慢起伏的 l 距离内的平均值, 其正负由地表是加热还是冷却决定。由式(7)可知, $\alpha_2(\theta)$ 相当于单位距离内的到达角起伏方差; 那么由到达角起伏的研究^[2]可知 $\alpha_2(\theta)$ 与 $\mathcal{P}_1(\theta, l)$ 相比是 θ, l 的缓变量, 故可作近似

$$\alpha_2 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \Delta l^{-1} \int d\xi \xi^2 \mathcal{P}(\theta, \xi) = \sigma_\theta^2 \approx \text{常数} \quad (9)$$

将式(8)和式(9)代入式(6)可得到描述奥伦斯坦-乌伦贝克过程的福克-普朗克方程

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1(\theta, l)}{\partial l} = k \frac{\partial}{\partial \theta} [(\theta - \theta_0/k) \mathcal{P}_1(\theta, l)] + \frac{\sigma_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathcal{P}_1(\theta, l) \quad (10)$$

对(10)式两边作傅里叶变换, 记

$$\hat{\mathcal{P}}(l, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\theta} \mathcal{P}(\theta, l) d\theta \quad (11)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{P}}(l, \eta)}{\partial \theta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\theta} \frac{\partial \mathcal{P}(\theta, l)}{\partial \theta} d\theta = -i\eta \hat{\mathcal{P}} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathcal{P}}(l, \eta)}{\partial \theta^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\theta} \frac{\partial^2 \mathcal{P}(\theta, l)}{\partial \theta^2} d\theta = -\eta^2 \hat{\mathcal{P}} \quad (13)$$

$$\theta \frac{\partial \hat{\mathcal{P}}(l, \eta)}{\partial \theta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\theta} \theta \frac{\partial \mathcal{P}(\theta, l)}{\partial \theta} d\theta = -\hat{\mathcal{P}} - \eta \frac{\partial \hat{\mathcal{P}}}{\partial \eta} \quad (14)$$

把式(11)~(14)式代入(10)式, 就得到一阶拟线性方程

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{P}}(l, \eta)}{\partial l} + k\eta \frac{\partial \hat{\mathcal{P}}(l, \eta)}{\partial \eta} = (i\eta\theta_0/l - \sigma_0^2\eta^2/2) \hat{\mathcal{P}}(l, \eta) \quad (15)$$

通过与(15)式对应的常微分方程

$$\frac{dl}{1} = \frac{d\eta}{k\eta} = \frac{d\hat{\mathcal{P}}}{(i\theta_0\eta/l - \sigma_0^2\eta^2/2)\hat{\mathcal{P}}} \quad (16)$$

的求解可得到特征函数

$$\hat{\mathcal{P}}(l, \eta) = \exp\{i[(\theta(0) - \theta_0/k)l e^{-2\mu} + \theta_0/k] \eta - (\sigma_0^2/4k)(1 - e^{-2\mu})\eta^2\} \quad (17)$$

其中 $\theta(0)$ 是发射端光束指向与理想瞄准方向间夹角。易见这是均值为 $[(\theta(0) - \theta_0/k)l e^{-2\mu} + \theta_0/k]$, 方差为 $\sigma_0^2(1 - e^{-2\mu})/2k$ 的正态分布的特征函数, 由此得到到达角起伏概率分布为

$$\mathcal{P}(\theta, l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sigma_0^2}{2k} (1 - e^{-2\mu}) \right]^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{k[\theta - (\theta(0) - \theta_0/k)l e^{-2\mu} - \theta_0/k]^2}{\sigma_0^2(1 - e^{-2\mu})} \right\} \quad (18)$$

在光束传输的距离足够长时, $e^{-\mu}, e^{-2\mu} \rightarrow 0$, 那么(18)式简化为熟知的形式^[6]

$$\mathcal{P}(\theta, l \rightarrow \infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_0^2/k}} \exp\left\{ -\frac{(\theta - \theta_0/k)^2}{\sigma_0^2/k} \right\} \quad (19)$$

比较(18)式与高斯分布概率密度函数的标准形式, 可得到到达角起伏方差

$$\sigma^2 = (\sigma_0^2/2k)[1 - \exp(-2kl)] \quad (20)$$

考虑到在湍流惯性子区间内, $k^2 \sim C_s^2 \rho^{2/3}$ 与 l 无关, 这里 C_s 是湍流大气折射率起伏结构常数, ρ 是束心偏离平均传输轴线的横向位置。在条件 $lC_s \geq \rho^{1/3}$ 时, 式(20)近似为

$$\sigma^2 = \sigma_0^2/2k$$

由于 $\sigma_0^2/2k \sim C_s^2 l$, 所以利用 e 指数和幂指数函数随 l 变化的改变率规律, (20)式给出了 σ^2 随着 C_s 或 l 增大将要出现饱和的非线性增长现象, 该结论与实验一致^[7]。对于完整描述光束到达角起伏的二维情况, 在消除发射指向误差 $\theta(0) = 0$, 和设 $\theta_1 = \theta_0(1 - e^{-\mu})/kl$ 时(18)式变为

$$\mathcal{P}(\theta, l) = \frac{\theta}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\theta^2 + \theta_1^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{\theta\theta_1}{\sigma^2}\right) \quad (21)$$

这里 I_0 是变形贝塞尔函数。在远距离传输时, 式(21)简化为

$$\mathcal{D}(\theta, l) = \frac{\theta}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right) \quad (22)$$

3 到达角起伏导致的光强起伏

设系统发射一稳定基模高斯光束,水平通过湍流大气传输 l 米后落在接收平面上,接收平面上的光强分布为

$$I(l; x, y) = \frac{I_0 R_0^2}{R^2} \exp\left\{-\frac{2[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]}{R^2}\right\} \quad (23)$$

式中, I_0 为发射端光束中心初始光强, R_0 为发射光束初始半径, R 是接收面上光束半径, ξ 和 η 是束心相对于理想方向的随机偏离。设用半径为 r 的圆孔接收光信号,圆孔的孔径函数为下列高斯权重函数

$$G(\rho, \varphi) = \exp[-2\rho^2/r^2] \quad \begin{cases} 0 \leq \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < +\infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

则接收孔径积分光强为

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{2\rho_0^2}{(r^2 + R^2)}\right] \quad (24)$$

式中, $\rho_0^2 = \xi^2 + \eta^2$, $P_0 = \pi R_0^2 R^2 I_0 / 2(R^2 + r^2)$ 是 $\rho_0 = 0$ 时的积分光强。由于到达角起伏 $\Delta\theta < 10'$, 故在几何光学近似下 θ 与 ρ_0 间有近似关系 $\rho_0 \approx \theta l$, 记 $\alpha^2 = (r^2 + R^2) / 4l^2$, 式(24)为

$$P = P_0 \exp[-(1/2)\theta^2/\alpha^2] \quad (25)$$

上式表示积分光强为 P 时,到达角 θ 必为

$$\theta^2 = -2\alpha^2 \ln(P/P_0) = \ln(P_0/P) 2\alpha^2 \quad (26)$$

由此式可知积分光强增量为 dP 时,到达角的增量必为

$$d\theta = -(\alpha^2/\theta P) dP \quad (27)$$

这意味着

$$P_{\text{rob}}(P < \mathcal{F} < P + dP) = P_{\text{rob}}(\theta > \Theta > \theta + d\theta) \quad (28)$$

我们记

$$P_{\text{rob}}(P < \mathcal{F} < P + dP) = \mathcal{D}_3(P) dP \quad (29)$$

综合上面各式即得到达角起伏导致的积分光强起伏概率

$$\mathcal{D}_3(P) = \frac{\alpha^2}{\sigma^2 P_0} \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\alpha^2/\sigma^2 - 1} \exp\left[-\frac{\theta_1^2}{2\sigma^2}\right] I_0 \left(\frac{\sqrt{2\alpha^2 \ln(P_0/P)} \theta_1}{\sigma^2}\right) \quad (30)$$

当光束传输的距离足够长或湍流强度 C_n 足够大时, $e^{-u} \rightarrow 0$, 那么上式退化为文献[6]所描述的分

$$\mathcal{D}_3(P) = \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{(\alpha/\sigma)^2} / P \quad 0 < P < P_0 \quad (31)$$

4 结 论

本文运用马尔柯夫近似和梯度折射率光学原理研究了狭光束在湍流大气中传输的统计特性,得到如下结论: 1) 湍流大气中传输光束的到达角起伏满足 *Rician* 分布,随着湍流强度与传输路径的增加其分布趋于高斯分布; 2) 到达角起伏方差 σ^2 随湍流强度和传输路径的增加将

呈现饱和效应,该结论与实验研究一致^[7]; 3) 得到了反映 C_n 和 l 效应的到达角调制积分光强概率密度函数,该分布是到达角慢起伏的函数也是 *Fried*^[6] 所提出分布的推广。由于讨论中忽略了大功率激光传输的非线性效应,故仅适用于小功率激光束的大气传输。

参 考 文 献

- 1 S. Chatterjee. *Opt. Commun.*, 1989, 74(3-4): 149
- 2 R. Fante. *Proc. IEEE*, 1975, 63(12): 1669
- 3 R. N. Bhattacharya, E. C. Waymirc. *Stochastic Process with Application*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, 367~393
- 4 乔亚夫. 梯度折射率光学, 北京: 科学出版社, 1991. 145
- 5 王竹溪. 统计物理学导论, 第二版, 北京: 人民教育出版社, 1965. 234
- 6 D. L. Fried. *Appl. Opt.*, 1973, 12(2): 422
- 7 M. S. Meleukii, M. L. Mironov. *Soviet J. Quant. Electr.*, 1982, 12(1): 3

Probability of Arrival-angle Fluctuations and the Statistics of the Intensity Fluctuations Caused by Narrow Laser Beam Motion

Zhang Yixin

(Department of Mechanics, Wuzi Institute of Light Industry, Wuzi 214036)

Abstract The Fokker-Plank equation for probability density of the arrival-angle fluctuations, which is satisfied with the Ornstein-Uhlenbeck process, is derived by making use of the Markovian random process approximation for arrival-angle fluctuations and geometrical optics approximation for laser propagation in atmospheric turbulence. The Rician probability distribution density function of the arrival-angle fluctuations that relies on the propagating distance is obtained. A discussion of the statistics of the intensity fluctuations caused by the angle of arrival fluctuations of a narrow laser beam was given.

Key words laser propagation, angle of arrival fluctuation, probability, scintillation