

双模激光场强度起伏的噪声功率 密度谱及其时谱特性*

印建平 朱士群 高伟建

王育竹

(苏州大学物理系, 苏州 215006)

(中国科学院上海光机所量子光学开放实验室, 上海 201800)

提要 采用光场的量子理论导出了自由运转双模激光场强度起伏的噪声功率密度谱及其时谱公式, 重点分析讨论了双模激光场的量子统计特性及其拍频噪声的时谱特性和频率调谐特性。研究发现双模激光拍频噪声的时谱特性也可用于双模激光的稳频稳幅。

关键词 双模激光, 强度起伏, 噪声功率密度谱, 时谱特性, 稳频稳幅

1 引 言

双模激光场在双模激光噪声^[1]、双模压缩态^[2]和量子相干性及其时谱特性^[3]等方面表现出与单模相干态激光不同的效应, 而双模激光器在双模激光干涉仪^[4]、高分辨率激光光谱学及其光学频标中有着广阔的应用前景。因此, 研究双模激光场强度起伏的噪声功率密度谱及其时谱特性, 并探讨其新的可能应用有着十分重要的意义。

近年来, 关于多模激光的量子统计特性、光子反相关效应^[5]和强度相关^[6]以及噪声测量与研究^[7,8]已有不少文献介绍。有关双模激光场 $g^{(1)}(\tau)$ 、 $g^{(2)}(\tau)$ 的时谱特性^[3,9]和倍增白噪声特性^[1]等也有一些文献讨论。本文在上述工作的基础上, 重点推导了自由运转双模激光场强度起伏的噪声功率密度谱 $P(\omega)$ 及其时谱公式, 分析了相应的时谱特性和频率调谐特性, 讨论了 $P(\omega, t)$ 时谱特性在双模激光稳频稳幅中的可能应用。

2 强度起伏的噪声功率密度谱

设第 k 模的湮灭算符为 \hat{a}_k , 模体积为 v , 空间波函数为 $u_k(\mathbf{x})$, 则频率为 ω_k 的双模激光场的电场算符可写成

$$\hat{E}(\mathbf{x}, t) = \hat{E}^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \hat{E}^{(-)}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

式中

* 本工作由江苏省自然科学基金资助。

收稿日期: 1994 年 1 月 25 日; 收到修改稿日期: 1994 年 4 月 19 日

$$\begin{cases} \hat{E}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^2 \hat{a}_k u_k(\mathbf{x}) e^{-j\omega_k t} \\ \hat{E}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^2 \hat{a}_k^{(+)} u_k^*(\mathbf{x}) e^{j\omega_k t} \end{cases} \quad (2)$$

而

$$u_k(\mathbf{x}) = j(\hbar\omega_k/2\varepsilon_0\nu)^{1/2} e^{jk\cdot\mathbf{x}} \quad (3)$$

由对易关系 $[\hat{a}_k, \hat{a}_k^{(+)}] = 1$, 不难证明

$$[\hat{E}^{(+)}(t), \hat{E}^{(-)}(t + \tau)] = \frac{c}{\nu} \sum_k e^{j\omega_k \tau} \quad (4)$$

当取模体积 $\nu = SL$, 归一化腔长 $L = CT_R$ (T_R 为光电探测器的响应时间), 探测器有效光电灵敏面 $S = 1$ 时, 由 $\delta(\tau)$ 函数的定义得到电场算符所满足的对易关系

$$[\hat{E}^{(+)}(t), \hat{E}^{(-)}(t + \tau)] = \delta(\tau) \quad (5)$$

于是由光场一阶量子相关函数的定义

$$G^{(1)}(\tau) = \langle \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(+)}(t + \tau) \rangle \quad (6)$$

和(5)式得到光场强度的自相关函数

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}(t) \hat{I}(t + \tau) \rangle &= \langle \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(+)}(t) \hat{E}^{(-)}(t + \tau) \hat{E}^{(+)}(t + \tau) \rangle \\ &= \langle : \hat{I}(t) \hat{I}(t + \tau) : \rangle + G^{(1)}(\tau) \delta(\tau) = \langle : \hat{I}(t) \hat{I}(t + \tau) : \rangle + \langle \hat{I} \rangle \delta(\tau) \end{aligned} \quad (7)$$

不难证明相应的强度起伏的自相关函数可写成

$$\langle \Delta \hat{I}(t) \Delta \hat{I}(t + \tau) \rangle = \langle : \Delta \hat{I}(t) \Delta \hat{I}(t + \tau) : \rangle + \langle \hat{I} \rangle \delta(\tau) \quad (8)$$

由光场二阶量子相干度的定义

$$g^{(2)}(\tau) = G^{(2)}(\tau) / \langle \hat{I} \rangle^2 = \langle : \hat{I}(t) \hat{I}(t + \tau) : \rangle / \langle \hat{I} \rangle^2 \quad (9)$$

$$\langle : \hat{I}(t) \Delta \hat{I}(t + \tau) : \rangle = \langle : \hat{I}(t) \hat{I}(t + \tau) : \rangle - \langle \hat{I} \rangle^2 \quad (10)$$

$$\langle \Delta \hat{I}(t) \Delta \hat{I}(t + \tau) \rangle = \langle \hat{I} \rangle^2 [g^{(2)}(\tau) - 1] + \langle \hat{I} \rangle \delta(\tau) \quad (11)$$

一般情况下, 测量强度起伏的噪声功率谱 $P(\omega)$ 要比直接测量光场的二阶相关函数 $g^{(2)}(\tau)$ 方便得多。由于 $P(\omega)$ 是强度起伏自相关函数 $\langle \Delta \hat{I}(t) \Delta \hat{I}(t + \tau) \rangle$ 的傅里叶变换:

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Delta \hat{I}(t) \Delta \hat{I}(t + \tau) \rangle e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (12)$$

故由(11)式代入(12)式, 并令

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [g^{(2)}(\tau) - 1] e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (13)$$

得到

$$P(\omega) = \langle \hat{I} \rangle^2 A(\omega) + \langle \hat{I} \rangle / 2\pi = P_B(\omega) + P_{SN} \quad (14)$$

式中第一项 $P_B(\omega)$ 为与频率 ω 有关的噪声功率密度谱(即有色噪声)。对于多模激光场, $P_B(\omega)$ 称为拍频噪声功率密度谱。第二项 P_{SN} 为与频率 ω 无关的散粒噪声(Shot noise, 即白噪声)。

对于双模激光场, 不难证明其二阶相干度由下式给出^[3]

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^2 \langle \hat{I}_k \rangle^2}{\left(\sum_{k=1}^2 \langle \hat{I}_k \rangle \right)^2} + |g^{(1)}(\tau)|^2 \quad (15)$$

式中

$$|g^{(1)}(\tau)| = \frac{1}{[\langle \hat{I}_1 \rangle + \langle \hat{I}_2 \rangle] \langle \hat{I}_1 \rangle^2 + \langle \hat{I}_2 \rangle^2 + 2\langle \hat{I}_1 \rangle \langle \hat{I}_2 \rangle \cos \Delta\omega_q \tau}^{1/2} \quad (16)$$

为双模激光场的一阶时间相干度。这里 $\Delta\omega_q = 2\pi\Delta\nu_q$, $\Delta\nu_q = C/2L$, L 为激光器腔长, $\langle \hat{I}_1 \rangle$ 和 $\langle \hat{I}_2 \rangle$ 分别为双纵模输出的平均光强。

当 $\langle \hat{I}_1 \rangle = \langle \hat{I}_2 \rangle = \langle \hat{I}_0 \rangle$ 时, 由(15), (16) 式代入(13) 式得到

$$A(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\Delta\omega_q \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{4} [\delta(\omega - \Delta\omega_q) + \delta(\omega + \Delta\omega_q)] \quad (17)$$

考虑到实际测量中只能测到噪声功率密度谱的正频部分 ($\omega = \Delta\omega_q$), 于是由(17) 式代入(14) 式得到

$$P(\omega) = \frac{1}{4} \langle \hat{I} \rangle^2 \delta(\omega - \Delta\omega_q) + \frac{1}{2\pi} \langle \hat{I} \rangle \quad (18)$$

此式即为等幅功率谱模型下双模激光场强度起伏的噪声功率密度谱。

3 拍频噪声功率密度谱的时谱公式

考虑到自由运转激光纵模频率漂移效应对双模输出强度的影响, 双模激光场二阶相干度的时谱由下式给出^[10]

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - \frac{\hat{I}_1^2(t) + \hat{I}_2^2(t)}{[\hat{I}_1(t) + \hat{I}_2(t)]^2} + |g^{(1)}(t, \tau)|^2 \quad (19)$$

式中

$$|g^{(1)}(t, \tau)| = [\hat{I}_{21}^2(t) + \hat{I}_{22}^2(t) + 2\hat{I}_{12}(t) \hat{I}_{22}(t) \cos(\Delta\omega_q \tau)]^{1/2} \quad (20)$$

而

$$\begin{cases} \hat{I}_{21}(t) = \hat{I}_1(t) / [\hat{I}_1(t) + \hat{I}_2(t)] \\ \hat{I}_{22}(t) = \hat{I}_2(t) / [\hat{I}_1(t) + \hat{I}_2(t)] \end{cases} \quad (21)$$

$$\hat{I}_{21}(t) + \hat{I}_{22}(t) = 1 \quad (22)$$

由(20)~(22)式代入(13)式得到

$$A(\omega, t) = \frac{\hat{I}_1(t) \hat{I}_2(t)}{[\hat{I}_1(t) + \hat{I}_2(t)]^2} [\delta(\omega - \Delta\omega_q) + \delta(\omega + \Delta\omega_q)] \quad (23)$$

对于 He-Ne 激光器, 双模输出强度由下式给出

$$\begin{cases} \hat{I}_1(t) = \langle \hat{I}_0 \rangle \exp\left[-\frac{\ln 2}{\Delta\nu_b^2} (\Delta\nu_q - 2\Delta\nu(t))^2\right] \\ \hat{I}_2(t) = \langle \hat{I}_0 \rangle \exp\left[-\frac{\ln 2}{\Delta\nu_b^2} (\Delta\nu_q - 2\Delta\nu(t))^2\right] \end{cases} \quad (24)$$

于是由(24)式代入(23)式得到

$$A(\omega, t) = \frac{1}{2\text{Ch}[2a\Delta\nu(t)]} [\delta(\omega - \Delta\omega_q) + \delta(\omega + \Delta\omega_q)] \quad (25)$$

式中

$$a = 4\ln 2 \cdot \Delta\nu_q / \Delta\nu_b^2 \quad (26)$$

对于实际测量, 自由运转双模 He-Ne 激光的拍频噪声功率密度谱的时谱公式为

$$P_b(\omega, t) = \langle \hat{I} \rangle^2 A(\omega, t) = \frac{\langle \hat{I} \rangle^2}{2\text{Ch}[2a\Delta\nu(t)]} \delta(\omega - \Delta\omega_q) \quad (27)$$

当 $\omega = \Delta\omega_q$ 时, 由(27) 式得到拍频噪声功率

$$P_B(\Delta\omega_q, t) = \frac{1}{2} \langle \hat{I} \rangle^2 \frac{B}{\text{Ch}[2a\Delta\nu(t)]} \quad (28)$$

式中 B 为一个数值很大的常数(因为当 $\omega = \Delta\omega_q$ 时, $\delta(\omega_q) \rightarrow \infty$)。当频率漂移量 $\Delta\nu(t) = 0$ 时, 上式改写为

$$P_B(\Delta\omega_q) = \frac{1}{4} B \langle \hat{I} \rangle^2 \quad (29)$$

此时, 对于内腔双模 He-Ne 激光器, 其双模输出强度相等 ($\langle \hat{I}_1 \rangle = \langle \hat{I}_2 \rangle$), 偏振方向互相垂直。

4 理论分析与应用探讨

4.1 理论分析

设激光线宽分别为 $\Delta\nu_b = 800 \text{ MHz}$, 1000 MHz 和 1200 MHz , 纵模间距 $\Delta\nu_c = 750 \text{ MHz}$ ($L = 20 \text{ cm}$), 则当纵模频率漂移量从 -750 MHz 变化到 750 MHz 时, 由(28)式计算得到双模激光拍频噪声功率随纵模频率漂移量 $\Delta\nu(t)$ 而变化的时谱特性曲线, 如图 1 所示。

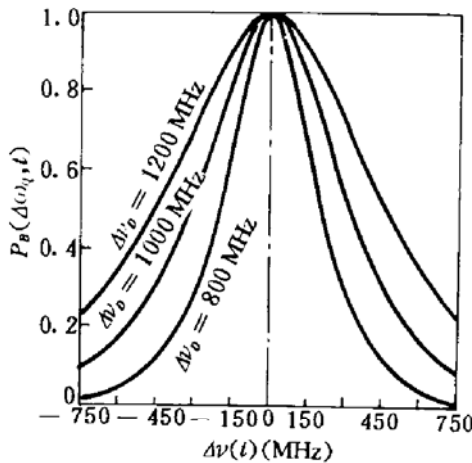


Fig. 1 The time-spectrum characteristics curves of $P_B(\Delta\omega_q, t)$ on a two-mode laser

由图 1 知, 双模激光的拍频噪声功率不仅与双模输出的平均光强 $\langle \hat{I} \rangle$ 有关, 而且还与双模频率漂移效应 $\Delta\nu(t)$ 和双模激光线宽 $\Delta\nu_b$ 有关, 揭示了双模激光拍频噪声功率的时谱特性在双模激光稳频稳幅等中的可能应用。

4.2 应用探讨

如果将(28)式或图 1 中的频率漂移量 $\Delta\nu(t)$ 改为频率调谐量 $\Delta\nu$, 则(28)式即为频率调谐公式, 而图 1 即为频率调谐特性曲线。

由图 1 可以看出, 双模激光拍频噪声功率的频率调谐特性呈倒“V型”曲线, 且关于直线 $\Delta\nu = 0$ 对称。因此, 如果取 $\Delta\nu = 0$ 作为频率锁定点, 利用时谱信号 $P_B(\Delta\omega_q, t)$ 作为误差信号去控制激光

器的腔长, 或放电电流, 即可实现双模 He-Ne 激光器的稳频稳幅(称之为稳频方法 1), 其稳频原理与方法类似于纵向塞曼拍频曲线稳频法^[11]和 $g^{(1)}(\tau)$ 时谱稳频法^[9]。此外, 由图 1 知, 选择激光线宽 $\Delta\nu_b$ 较小的双模 He-Ne 激光器, 将有利于提高双模激光的稳频稳幅精度。

然而, 在 $\Delta\nu = 0$ 附近, 由于 $P_B(\Delta\omega_q, \Delta\nu)$ 调谐特性曲线的斜率不太大, 故取 $\Delta\nu = 0$ 为频率锁定点时, 频率稳定度不易做得更高。但是从图 1 不难看出, 如果采用斜率鉴别器^[12], 将频率锁定点 ν_{lock} 取在倒“V形”曲线某一侧的中点上, 则利用时谱特性 $P_B(\Delta\omega_q, t)$ 来实现双模 He-Ne 激光器的稳频稳幅(称之为稳频方法 2)是十分有利的, 可望获得更高的频率稳定度。其稳频稳幅原理和方法类似于横向塞曼拍频曲线稳频法^[13]。

如果在 $\Delta\nu = 0$ 附近, 由(28)式对 $\Delta\nu$ 求一阶导数, 则有

$$P_B'(\Delta\omega_q, \Delta\nu) = \frac{dP_B}{d\Delta\nu} = -B \langle \hat{I} \rangle^2 \text{ath}(2a\Delta\nu) \cdot \text{sech}(2a\Delta\nu) \quad (30)$$

4.3 稳频精度分析

在 $\Delta\nu = 0$ 处, 由(28)式展开并取至二级近似, 得到

$$P_B(\Delta\omega_q, \Delta\nu) \approx \frac{1}{2} B \langle \hat{I} \rangle^2 (1 - 2a^2 \Delta\nu^2) \quad (31)$$

对(31)式两边求微分,并整理得到

$$\delta_1(\Delta\nu) = |\delta P_B| / 2B \langle \hat{I} \rangle^2 a^2 \Delta\nu_1 \quad (32)$$

式中 $\Delta\nu_1$ 在 $\Delta\nu = 0$ 附近取值。

同样,由(30)式得到频率调谐特性曲线在 $\Delta\nu = 0.55/a$ 处的斜率

$$k \approx \pm \frac{1}{2} B \langle \hat{I} \rangle^2 a \quad (33)$$

于是由图 1 得到如下近似关系

$$\delta_2(\Delta\nu) \approx |\delta P_B| / \frac{1}{2} B \langle \hat{I} \rangle^2 a \quad (34)$$

由上述(32)和(34)式可分别计算得到稳频方法 1 和方法 2 的稳频精度。如果由(34)式和(32)式相除,则可得到

$$\frac{\delta_2(\Delta\nu)}{\delta_1(\Delta\nu)} \approx 4a\Delta\nu_1 = \frac{16 \ln 2 \cdot \Delta\nu_q}{\Delta\nu_b^2} \Delta\nu_1 \quad (35)$$

设 $\Delta\nu_q = 750 \text{ MHz}$, $\Delta\nu_b = 800 \sim 1200 \text{ MHz}$,则由上式计算得到

$$\frac{\delta_2(\Delta\nu)}{\delta_1(\Delta\nu)} = (0.013 \sim 0.0058) \Delta\nu_1 \times 10^{-6} \ll 1 \quad (36)$$

由此可见,方法 2 的稳频精度远优于方法 1 的稳频精度。如果暂且不计 $B \langle \hat{I} \rangle^2$ 的影响,并令 $\Delta\nu_q = 750 \text{ MHz}$, $\Delta\nu_b = 800 \text{ MHz}$,幅度鉴别能力 $|\delta P_B| = 0.001$,则由(34)式不难估计出稳频方法 2 的稳频精度为 1.28×10^{-9} 。由于 $B \langle \hat{I} \rangle^2$ 是一个远大于 1 的常数,故本文提出的稳频方法的精度将远远优于 10^{-9} 量级。例如,当取 $B \langle \hat{I} \rangle^2 = 10 \sim 10^2$ 时,则本方法的稳频精度可达 $10^{-10} \sim 10^{-11}$ 量级。显然,这远比传统的双模稳频方法的精度^[14~17](一般为 $10^{-7} \sim 10^{-9}$) 高得多。

此外,由图 1 还可以看出,双模激光拍频噪声功率的时谱特性还可以用于双模激光频率漂移效应的观测和双模激光线宽 $\Delta\nu_b$ 的测量。

5 初步结论

5.1 稳态下双模激光场强度起伏的噪声功率密度谱由拍频噪声功率密度谱和散粒噪声功率密度谱组成,其中拍频噪声功率密度谱还与双模输出强度有关。

5.2 自由运转双模激光场的拍频噪声功率密度谱不仅与纵模频率漂移效应 $\Delta\nu(t)$ 有关,而且还与双模激光线宽 $\Delta\nu_b$ 有关,其时谱特性或频率调谐特性呈倒“V 形”,且关于直线 $\Delta\nu(t) = 0$ 对称。

5.3 利用双模激光场拍频噪声功率的时谱特性可实现双模 He-Ne 激光器的稳频稳幅。该方法不仅具有光电系统简单、抗干扰能力强和动态性能好等优点,而且如同 $g^{(1)}(\tau)$ 和 $g^{(2)}(\tau)$ 时谱稳频法^[9,10]一样,从根本上克服了利用双模偏振特性来实现双模激光的传统方法的某些不足与局限性^[9],使稳频稳幅精度做得更高。此外,该方法不仅可适用于随机偏振特性输出的内腔双模 He-Ne 激光器,而且也可适用于平行线偏振输出的半外腔式双模 He-Ne 激光器,或双模半导体激光器。

参 考 文 献

- 1 M. M-Tehrani, L. Mandel. Intensity fluctuations in a two-mode ring laser. *Phys. Rev.*, 1978, A17(2): 694~

- 700; Shiqun Zhu. Steady-state analysis of a two-mode laser with multiplicate white noise. *Phys. Rev.*, 1992, **A45**(9): 8148
- 2 彭堃焯, 黄茂全, 刘 晶 等. 双模光场压缩态的实验研究. *物理学报*, 1993, **42**(7): 1079~1085
- 3 印建平, 朱士群, 高伟建. 双模激光场的二阶量子相干性及其时谱特性. *物理学报*, (已录用)
- 4 周肇飞, 迟桂纯, 程相荣 等. 双纵模激光干涉仪. *光电工程*, 1988, (4): 10~21
- 5 黎永青, 王育竹. 多模激光场中的光子反相关效应. *量子电子学*, 1989, **6**(1): 6~10
- 6 Junji Kinoshite, Tadashi Aoki. Intensity correlations of multimode gas laser. *Phys. Rev.*, 1992, **A46**: 5938~5943
- 7 Jean-hubert Wilbrod. Correlation between mode fluctuations in a multi-longitudinal mode laser. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1987, **QE-23**(8): 1321~1328
- 8 巴恩旭, 吕可诚, 张春平. 气体激光器的低频差拍噪声. *中国激光*, 1983, **11**(2): 105~109
- 9 Yin Jianping. TC time-spectrum method for frequency and power stabilization of a two-mode He-Ne laser. *Chin. Phys.*, 1990, **10**(1): 175~180; *光学学报*, 1988, **8**(5): 397~403
- 10 Jianping Yin, Shiqun Zhu, Weijian Gao. Time-spectrum characteristics of the degree of second-order coherence of a two-mode laser field and its possible application in frequency and power stabilization. *Proc. SPIE*, 1992, **1726**: 286~289
- 11 王 楚, 沈伯弘, 吴义芳. 633 nm 氦氛激光的纵向塞曼拍频曲线及稳频原理与实验. *光学学报*, 1984, **4**(9): 808~813
- 12 王 楚, 吴义芳, 沈伯弘. 带有锁相系统的横向塞曼 He-Ne 稳频激光器. *北京大学学报*, 1987, (1): 102~108
- 13 巴恩旭, 杨性愉, 刘玉照 等. 模向塞曼激光器的实验研究. *光学学报*, 1984, **4**(5): 398~405
- 14 R. Balhorn, H. Kunzman, F. Lebowsky. Frequency stabilization of internal-mirror helium-neon lasers. *Appl. Opt.*, 1972, **11**(4): 742~744
- 15 郭银伏, 吕可诚, 杜海东. 通用内腔 He-He 激光器稳频稳幅的新方法. *应用激光联刊*, 1984, **4**(5): 3~6
- 16 岳 希. 热稳频 He-Ne 激光器. *激光与光学*, 1989, (4): 30~33
- 17 周肇飞, 袁家勤, 黄仲平. He-Ne 激光器的双纵模热稳频系统. *仪器仪表学报*, 1988, **9**(4): 375~380

Noise Power Density Spectrum and Its Time-spectrum Characteristics of the Intensity Fluctuation of a Two-mode Laser under Free Operation

Yin Jianping Zhu Shiqun Gao Weijian

(Department of Physics, Suzhou University, Suzhou 215006)

Wang Yuzhu

(Quantum Optics Laboratory, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

Abstract Based on quantum theory of light, the noise power density spectrum and its time-spectrum formula of the intensity fluctuation of a two-mode laser are derived. Quantum statistical properties of a two-mode laser and its time-spectrum characteristics as well as the frequency tuning features of the frequency beat noise are analyzed and discussed. The study shows that the time-spectrum characteristics of the frequency beat noise of a two-mode laser can be applied to the frequency and power stabilization of two-mode lasers

Key words two-mode laser, intensity fluctuation, noise power density spectrum, time-spectrum characteristics, frequency and power stabilization