

非线性衍射像件输入输出系统

王永昭 陈铁镜 C. S. Ih

(天津大学精密仪器工程系, 天津 300072)

提要 分析了体积光栅成像关系后, 推导了物像关系计算公式, 采用此公式具有较高的精确计算值。在此基础上得出体积光栅与体积全息的横向放大率、轴向放大率及角伸缩放率公式, 证明了成像伸缩特性与物像坐标值、波长比例系数 μ 之间的关系。

关键词 非线性衍射栅件, 物像坐标值, 物像伸缩特性

1 导 言

在全息系统成像关系计算中, 文献[1~3]用于求波长变化后平面全息系统的物像关系及伸缩特性。文献[4]由比较公式等导出光栅成像系统及其伸缩特性。文献[5]讨论体积光栅的成像计算公式。本文概论非线性光栅件输入输出系统, 诸如此公式对平面光波的输入系统也可适用。一般来说用此公式求物像关系, 可以求出较精确的计算值。以此为基础推导了体全息和体光栅系统的物像放大伸缩率。将有关成像位置坐标值代入公式中, 可得计算值大部分情况下与成像实际坐标比值相近似, 推导证明了成像放大伸缩率与物像坐标及波长比值 μ 之间的关系。适于全息成像系统的设计。

2 体积全息成像系统的分析

2.1 体全息和体光栅系统物像关系公式

在再现系统中, 设照明光波为 $u_c(x_c, y_c, z_c)$, 其再现像可写为

$$u_c(x_c, y_c, z_c)u_1(x_1, y_1, z_1)u_R^*(x_R, y_R, z_R) = A_c A_1 A_R \exp i(\phi_{uc} + \phi_{u1} - \phi_{uR}) \quad (1)$$

$$u_c(x_c, y_c, z_c)u_1^*(x_1, y_1, z_1)u_R(x_R, y_R, z_R) = A_c A_1 A_R \exp i(\phi_{uc} - \phi_{u1} + \phi_{uR}) \quad (2)$$

上式分别表示了原始光波和共轭光波。式中 ϕ_{u1} 为物光光波, ϕ_{uR} 为参考光波及 ϕ_{uc} 为再现光波的位相。当记录光波与再现光波波长不同时, 为了求得在此情况下再现像点的坐标值, 可令 $\mu = \lambda_2/\lambda_1$, λ_1 为记录光波, λ_2 为照明光波, 并假设全息图可以缩放(为计算机产生光栅光学元件), 故设 $y'_2 = y_2/m$, $x'_2 = x_2/m$, m 为光栅光学元件缩放的线性倍率, x_2 为缩放前的坐标值, x'_2 为缩放后的坐标值(图 1)。在体全息的一次再现中只有一个再现像, 假设在原始像的再现中, 其位相可以整理为

$$\begin{aligned} \phi_{u_1 v} = & z_1 \frac{2\pi}{\lambda_1} \left[\left(\frac{x_2}{m} \right)^2 - 2 \left(\frac{x_2}{m} \right) x_1 + \left(\frac{y_2}{m} \right)^2 - 2 \left(\frac{y_2}{m} \right) y_1 + x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2 \right] (2z_1^2)^{-1} \\ & - \frac{2\pi}{\lambda_1} z_R \left[\left(\frac{x_2}{m} \right)^2 - 2 \left(\frac{x_2}{m} \right) x_R + \left(\frac{y_2}{m} \right)^2 - 2 \left(\frac{y_2}{m} \right) y_R + x_R^2 + y_R^2 + 2z_R^2 \right] (2z_R^2)^{-1} \\ & + \frac{2\pi}{\lambda_1 \mu} z_c [(x_2)^2 - 2(x_2)x_c + (y_2)^2 - 2(y_2)y_c + x_c^2 + y_c^2 + 2z_c^2] (2z_c^2)^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

进一步可以将其描写为

$$\begin{aligned} \phi_{u_1 v} = & \frac{\pi}{\lambda_2} \left\{ \left[x_2^2 \left(\frac{\mu}{m^2 z_1} - \frac{\mu}{m^2 z_r} + \frac{1}{z_c} \right) \right] + \left[y_2^2 \left(\frac{\mu}{m^2 z_1} - \frac{\mu}{m^2 z_r} + \frac{1}{z_c} \right) \right] \right. \\ & - \left[2x_2 \left(\frac{x_1 \mu}{m z_1} - \frac{x_r \mu}{m z_r} + \frac{x_c}{z_c} \right) \right] - \left[2y_2 \left(\frac{y_1 \mu}{m z_1} - \frac{y_r \mu}{m z_r} + \frac{y_c}{z_c} \right) \right] \\ & \left. + \frac{\mu(x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2)}{z_1} - \frac{\mu(x_r^2 + y_r^2 + 2z_r^2)}{z_r} + \frac{x_c^2 + y_c^2 + 2z_c^2}{z_c} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

当与方程式(1)作比较时,可以由上式得出相当于再现像点的坐标值

$$x_{3v} = \left(\frac{\mu x_1}{m z_1} - \frac{x_r \mu}{m z_r} + \frac{x_c}{z_c} \right) \left(\frac{\mu}{m^2 z_1} - \frac{\mu}{m^2 z_r} + \frac{1}{z_c} \right)^{-1} \quad (5)$$

$$y_{3v} = \left(\frac{\mu y_1}{m z_1} - \frac{y_r \mu}{m z_r} + \frac{y_c}{z_c} \right) \left(\frac{\mu}{m^2 z_1} - \frac{\mu}{m^2 z_r} + \frac{1}{z_c} \right)^{-1} \quad (6)$$

$$z_{3v} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{(x_{3v})^2}{z_{3vp}} - \frac{(y_{3v})^2}{z_{3vp}} + \left[\mu \left(\frac{l_1^2}{z_1} \right) - \mu \left(\frac{l_R^2}{z_R} \right) + \frac{l_c^2}{z_c} \right] \right\} \quad (7)$$

式中

$$l_1 = (x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2)^{1/2}$$

$$l_R = (x_R^2 + y_R^2 + 2z_R^2)^{1/2}$$

$$l_c = (x_c^2 + y_c^2 + 2z_c^2)^{1/2}$$

$$z_{3vp} = \frac{M_{lat} z_1}{\mu c_z}$$

(8)

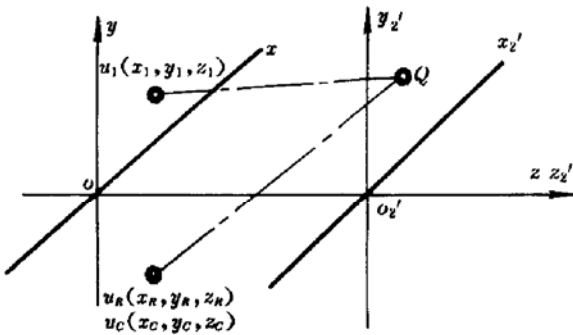


Fig. 1 Holographic coordinate system

以上的讨论中假设 $m = 1$ 。

2.2 体全息系统物像方程式的校正

为了使成像方程式具有较为广泛、准确的适用性,需要进一步对其进行修正。首先考虑在 xz 平面上进行分析,对于 yz 平面的情况也相似。设

$$\operatorname{tg} \alpha_{di} = x_{3v}^{cx} (z_{3v})^{-1}, \quad x_{3v}^{cx} = x_{3v} / c_z \quad (9)$$

α_{di} 为再现时正确的衍射角。因此

$$2z_{3v} = \frac{-(x_{3v}^{cx})^2}{z_{3vp}} + L$$

$$L = \left[\frac{\mu(x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2)}{z_1} - \frac{\mu(x_R^2 + y_R^2 + 2z_R^2)}{z_R} + \frac{(x_c^2 + y_c^2 + 2z_c^2)}{z_c} \right]$$

$$M_{lat}^{cx} = \frac{M_{lat}}{c_z} \quad (10)$$

所以

$$z_{3v} = \left[\frac{-(x_{3v}^{cx})^2 \mu}{M_{lat}^{cx} z_1} + L \right] (2)^{-1} \quad (11)$$

将有关数值代入(9)式可以获得

$$c_z = \left| \frac{2x_{3v} M_{lat} z_1 - \operatorname{tg} \alpha_{di} (x_{3v})^2 \mu}{L \operatorname{tg} \alpha_{di} M_{lat} z_1} \right| \quad (12)$$

经修正后可以将体全息系统物像关系方程式归纳为

$$x_{3v}^{cx} = \frac{M_{lat} L z_1 \operatorname{tg} \alpha_{di}^x}{2M_{lat} z_1 \pm x_{3v} \mu \operatorname{tg} \alpha_{di}^x} \quad (13)$$

$$y_{3v}^{cy} = \frac{M_{lat} L z_1 \operatorname{tg} \alpha_{di}^y}{2M_{lat} z_1 \pm y_{3v} \mu \operatorname{tg} \alpha_{di}^y} \quad (14)$$

$$z_{3v} = \left[\pm \frac{(x_{3v}^{cx})^2 \mu}{M_{lat}^{cx} z_1} \pm \frac{(y_{3v}^{cy})^2 \mu}{M_{lat}^{cy} z_1} + L \right] (2)^{-1} \quad (15)$$

式中“+”适于平面参考光，“-”适于球面参考光

$$\sin \alpha_{di} = \mu (\sin \alpha_1 \pm \sin \alpha_R) \mp \sin \alpha_c \quad (16)$$

衍射角 α_{di}^x 和 α_{di}^y 表示在 xz 平面内或 yz 平面内的数值。

2.3 验证

为了对体全息成像公式进行验证,采用了如图 2 所示的全息系统。以平面光波为参考光的点光源记录系统,可以较为准确地获得共轭参考光。从而在原虚像位置上实现精确复位一个点实像,便于进行测试。记录时用 632.8 nm 光波波长,再现时用一个 GP20Na-1 产生钠光,波长为 589.3 nm。在红光再现点主光线方向的垂直平面上,测得两再现(红、黄)点之间的距离取平均值为 11.50 mm,由方程式计算的理论值(红、黄)再现像点之间的距离为 11.39 mm。由方程式计算的黄光成像点在 z 轴之间夹角的理论值为 21.3° ,而由验证系统实测结果,其夹角为 21.4° 。由于定位,处理应变,钠光弱及影响测量存在误差。

当运用校正系数进行校正时,在未校正之前 $x_{3v} = 76.3$ mm,坐标值 $z_{3v} = 195.25$,其衍射角 $\alpha_{3v} = 21.34^\circ$ 。当利用 c 校正系数进行校正后,求得的 $x_{3v}^{cx} = 77.86$ mm, $z_{3v} =$

195.20,计算衍射角的数值为 $\alpha_{3v} = 21.75^\circ$,与理论的衍射角值 $\alpha_{di} = 21.73^\circ$ 基本相符。

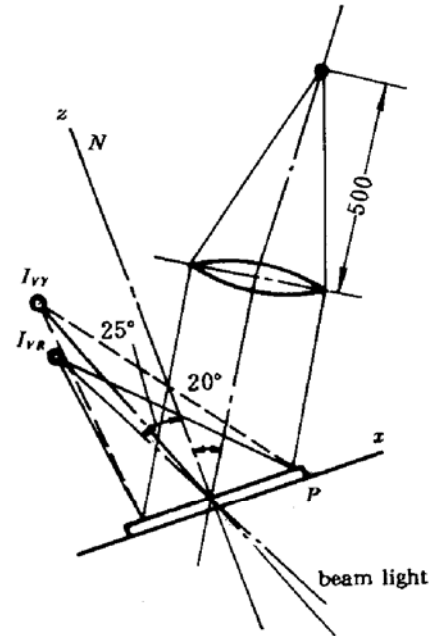


Fig. 2 The volume holographic system

3 体全息系统的物像伸缩特性

3.1 横向放大率

因为在体全息中为求得横向成像点的坐标值, x_{3v} 和 y_{3v} 的公式经校正后仍然适用,所以可以将横向放大率表示为

$$M_{lat}^{cx} = \left(\frac{z_1}{\mu z_c} + 1 - \frac{z_1}{z_R} \right)^{-1} \frac{1}{c_x} \quad (17)$$

在 yz 平面中的 M_{lat}^{cy} 也具有类似的形式,将(17)式中的 c_x 用 c_y 代替即可。

3.2 轴向放大率

与求解横向放大率相似,可以将轴向放大率表示为

$$M_{\text{long}} = \frac{1}{2} \left\{ - \left\{ \frac{(1-\mu)^2}{z_R z_1} [x_{3v}^{cx} M_{1at}^{cx} (x_R - x_1) - y_{3v}^{cy} M_{1at}^{cy} (y_R + y_1)] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu}{z_1^2} [(x_{3v}^{cx})^2 + (y_{3v}^{cy})^2] + \left[\mu \left(2 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{z_1^2} \right) \right] \right\} \right\} \quad (18)$$

当 $y = 0$ 时, 可以将轴向放大率表示为

$$M_{\text{long } z} = \frac{1}{2} \left\{ - \frac{(1-\mu)x_{3v}^{cx} \cdot 2(x_R - x_1) \cdot M_{1at}^{cx}}{z_R z_1} + \left[\frac{\mu(x_{3v}^{cx})^2}{z_1^2} + \mu \left(2 - \left(\frac{x_1}{z_1} \right)^2 \right) \right] \right\} \quad (19)$$

当 $x = 0$ 时, 类似可以将轴向放大率表示为

$$M_{\text{long } y} = \frac{1}{2} \left\{ - \frac{(1-\mu)y_{3v}^{cy} \cdot 2(y_R - y_1) \cdot M_{1at}^{cy}}{z_R z_1} + \left[\frac{\mu(y_{3v}^{cy})^2}{z_1^2} + \mu \left(2 - \left(\frac{y_1}{z_1} \right)^2 \right) \right] \right\} \quad (20)$$

同时由(18)式可以看到, 当 $\mu = 1$ 时, 且照明光束 c 和参考光束 R 全同, 这时 $x_{3v}^{cx} = x_1, y_{3v}^{cy} = y_1$, 即

$$M_{\text{long}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z_1^2} [(x_{3v}^{cx})^2 + (y_{3v}^{cy})^2] + 2 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{z_1^2} \right\} = 1$$

3.3 角放大率

这里在对体全息系统的物像关系角放大率进行论证和计算时, 是以空间成像点的坐标值为依据, 在 xz 和 yz 平面内分别进行定义的。对于在 xz 平面内的角放大率来说, 可以将其表示为

$$M_{\text{ang } xz} = \frac{d(x_{3v}/z_{3v})}{d(x_1/z_1)}$$

经过微分, 最后可以将其表示为

$$M_{\text{ang } (x/z)} = \left\{ \left(\frac{M_{1at}^{cx} z_1}{z_{3v}} \right) + \frac{[x_{3v}^{cx} (M_{1at}^{cx})^2 (x_{3v}^{cx} - x_1)]}{\mu (z_{3v})^2} \right\} \quad (21)$$

同样, 可以写出在 yz 平面中的角放大率为

$$M_{\text{ang } (y/z)} = \left\{ \left(\frac{M_{1at}^{cy} z_1}{z_{3v}} \right) + \frac{[y_{3v}^{cy} M_{1at}^{cy} (y_{3v}^{cy} - y_1)]}{\mu (z_{3v})^2} \right\} \quad (22)$$

对体全息成像系统的放大特性进行分析结果表明, 其横向放大率、纵向放大率及角放大率的放大过程, 基本是一种非线性的放大特性。

上述推导的适于波长变化的体全息成像放大率公式, 在部分情况下, 可以用以下公式近似计算

$$M_{1at-zz}^{\text{act}} = \frac{x_{3v}^{cx}}{x_1 \mu}, \quad M_{1at-yz}^{\text{act}} = \frac{y_{3v}^{cy}}{y_1 \mu} \quad (23)$$

$$M_{\text{long}}^{\text{act}} = \frac{z_1}{z_{3v} \mu} \quad (24)$$

$$M_{\text{ang}}^{\text{act}} = \frac{\text{tg } \alpha_{3v}}{\text{tg } \alpha_1} \quad (25)$$

公式(17)~22给出了体积全息和体积光栅的理论横向放大率、轴向放大率与角放大率计算公式, 证明了成像伸缩与物像坐标值及波长比值 μ 之间的关系。

致谢 本文与浙江大学光学仪器系、上海同济大学公路研究所、物理系作过有益的讨论, 特此致谢。

参 考 文 献

- 1 R. J. Collier, C. B. Burckhardt, L. H. Lin. *Optical Holography*, New York: Academic Press, 1971. 3~377
- 2 Yu. I. Ostrovsky, M. M. Butusov, G. V. Ostrovskaya. *Interferometry by Holography*. New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1980. 53
- 3 L. M. Soroko. *Holography and Coherent Optics*. Plenum press, 1980. 395
- 4 E. B. Champagne. *JOSA*, 1976, **56** : 53
- 5 王永昭, C. S. Ih. *物理学报*, 1989, **38**(5) : 812

The Image Formulas of Non-paraxial Holographic System and Its Magnifications

Wang Yongzhao Chen Tiejing C. S. Ih

(*Department of Precision Instruments Engineering, Tianjin University, Tianjing 300072*)

Abstract The image formulas of volume holographic system have been derived. The formulas are also suitable for the system which possesses a plane wave as a reference beam. The more exact calculation results can be obtained if these formulas are used in solving the image coordinate values of volume holographic system. The formulas of the lateral, longitudinal and angular magnifications are given. The relations between the coordinate values of the object, image point, ratio of wavelengths μ and the image magnifications are proved in this paper.

Key words element of nonlinear diffraction, magnifications between the object and image, coordinate values of object and image