

# Kerr 效应对依赖强度耦合的 J-C 模型中光场和原子偶极压缩效应的影响 \*

徐大海\*\* 吴美钧\*\* 彭金生\*\*\*

(华中师范大学物理系, 武汉 430070)

**提要** 研究了一充满 Kerr 介质的高  $Q$  腔中依赖强度耦合的 J-C 模型中光场和原子偶极压缩效应。结果发现: 适当强度的 Kerr 效应可以使光场的压缩效应增强, 而原子偶极压缩效应则因 Kerr 效应的增强而明显减弱, 以至最后几乎消失。

**关键词** Kerr 效应, 依赖强度耦合的 J-C 模型, 压缩效应

## 1 引 言

Jaynes-Cummings 模型<sup>[1]</sup>(以下简称 J-C), 是反映物质与辐射场相互作用的精确可解的理想模型。关于它的理论研究揭示了许多有意义的效应<sup>[2,3]</sup>。近年来, 为了研究原子和光场耦合时对光场强度的依赖, Buck 和 Sukumar 提出了一个依赖强度耦合的 J-C 模型<sup>[4]</sup>, 其哈密顿量为

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 S_z + \varepsilon (S_+ a \sqrt{a^+ a} + \sqrt{a^+ a} a^+ S_-) \quad (\hbar = 1) \quad (1)$$

式中  $a^+$  和  $a$  为频率为  $\omega$  的单模场的产生和消灭算符,  $S_z$  和  $S_{\pm}$  为原子的反转和跃迁算符, 其跃迁频率为  $\omega_0$ ,  $\varepsilon$  为原子和场的耦合常数。研究表明, 该模型不仅精确可解, 而且还能展示许多与 J-C 模型类似的量子特性<sup>[5,6]</sup>。

最近, Buzek 和 Jex 考虑了一个位于充满 Kerr 介质的高  $Q$  腔中(即不考虑腔体的单光子损耗, 以下简称 B-J 模型)与光场发生单光子相互作用的二能级原子。分别研究了 Kerr 介质对原子动力学行为<sup>[7]</sup>和光场压缩性质的影响<sup>[8]</sup>。结果表明, 与 J-C 模型相比 Kerr 介质的存在使得原子的崩溃回复更有规律, 光场的压缩效应因 Kerr 效应发生明显的变化。但迄今为止, 还未曾有人探讨过 Kerr 介质对依赖强度耦合的 J-C 中光场和原子偶极压缩效应的影响, 这便是本文要讨论的问题。

\* 国家自然科学基金和湖北省教委科研基金资助项目。

\*\* 荆州师范专科学校物理系, 湖北, 江陵 434100。

\*\*\* 中国高等科学技术中心(世界实验室)。

收稿日期: 1993 年 12 月 16 日; 收到修改稿日期: 1994 年 6 月 13 日

## 2 模型与态矢

我们考虑一个具有相同宇称的二级能原子处在充满 Kerr 介质的良腔中, 二能级原子和 Kerr 介质均同腔场耦合。Kerr 介质在绝热近似下与光场相互作用可用非线性谐振子描述, 而二能级原子与光场的耦合依赖于光场强度。在旋波近似下, 系统的 Hamiltonian 可以写为

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 S_z + \chi (a^+)^2 a^2 + \varepsilon (a \sqrt{a^+ a} S_+ + \sqrt{a^+ a} a^+ S_-) \quad (\hbar = 1) \quad (2)$$

式中  $\chi$  是二次谐振子的强度。为简单起见, 这里我们仅考虑共振情况, 即  $\omega = \omega_0$ 。

若在初始时刻原子处在激发态  $|e\rangle$ , 辐射场处于相干态  $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_n F_n |n\rangle; \quad F_n = e^{-\bar{n}/2} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{i n \varphi} \quad (3)$$

式中  $\bar{n}$  和  $\varphi$  是辐射场的初始平均光子数和初始位相。于是, 在相互作用绘景中, 系统在任意  $t$  时刻的态矢为

$$|\psi'(t)\rangle = \sum_n a_n(t) |e, n\rangle + b_{n+1}(t) |g, n+1\rangle \quad (4)$$

利用相互作用绘景中的 Schrödinger 方程, 并考虑到(4)式, 可得到

$$a_n(t) = \exp(-i\chi n^2 t) F_n \left[ \cos \gamma(n)t + \frac{i\chi n}{\gamma(n)} \sin \gamma(n)t \right] \quad (5)$$

$$b_n(t) = -i \exp(-i\chi n^2 t) F_n \frac{\varepsilon(n+1)}{\gamma(n)} \sin \gamma(n)t \quad (6)$$

这里

$$\gamma(n) = \sqrt{\chi^2 n^2 + \varepsilon^2 (n+1)^2} \quad (7)$$

代表原子的 Rabi 振荡频率, 从(7)式可看出 Kerr 介质对 Rabi 振荡频率的影响体现为  $\chi^2 n^2$ , 其作用使得原子-光场耦合系统具有单光子失谐量  $\chi n$ , 下面我们从(4)~(6)式出发, 来讨论腔中 Kerr 介质对光场和原子偶极压缩效应的影响。

## 3 Kerr 介质对光场压缩效应的影响

为了讨论光场的压缩效应, 定义两个缓变的厄米正交复振幅算符:

$$\chi_1(t) = \frac{1}{2} \{ a \exp[i(\omega t - \varphi)] + a^+ \exp[-i(\omega t - \varphi)] \} \quad (8)$$

$$\chi_2(t) = \frac{1}{2i} \{ a \exp[i(\omega t - \varphi)] - a^+ \exp[-i(\omega t - \varphi)] \} \quad (9)$$

其均方涨落  $\langle (\Delta\chi_1)^2 \rangle$  和  $\langle (\Delta\chi_2)^2 \rangle$  满足 Heisenberg 测不准关系

$$\langle (\Delta\chi_1)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta\chi_2)^2 \rangle \geq \frac{1}{16} \quad (10)$$

若存在

$$Q_i = \langle (\Delta\chi_i)^2 \rangle - \frac{1}{4} < 0 \quad (i = 1 \text{ 或 } 2) \quad (11)$$

则表明光场的  $\chi_i$  分量的涨落被压缩。下面以  $\chi_1$  分量为例来讨论 Kerr 介质对光场压缩效应的影响。利用(4)~(6)式, 容易求得

$$\langle a^+ a \rangle = \bar{n} + e^{-\bar{n}} \sum_n \frac{\bar{n}^n}{n!} \frac{\varepsilon(n+1)^2}{\gamma^2(n)} \sin^2 \gamma(n) \quad (12)$$

$$\langle a^2 \exp[2i(\omega t - \varphi)] + a^{+2} \exp[-2i(\omega t - \varphi)] \rangle = 2e^{-\bar{n}} \sum_n \frac{\bar{n}^{n+1}}{n!} \{ \cos[4\chi(n+1)t] \left[ \cos\gamma(n)t \cos\gamma(n+2)t + \frac{\varepsilon^2(n+3) \sqrt{(n+1)(n+3)} + \chi^2 n(n+2)}{\gamma(n)\gamma(n+2)} \sin\gamma(n)t \sin\gamma(n+2)t \right] + \sin[4\chi(n+1)t] \left[ \frac{\chi(n+2)}{\gamma(n+2)} \cos\gamma(n)t \sin\gamma(n+2)t - \frac{\chi n}{\gamma(n)} \sin\gamma(n)t \cos\gamma(n+2)t \right] \} \quad (13)$$

$$\langle a \exp[i(\omega t - \varphi)] + a^+ \exp[-i(\omega t - \varphi)] \rangle = 2e^{-\bar{n}} \sum_n \frac{\bar{n}^{(n+1/2)}}{n!} \{ \cos[(2n+1)\chi t] \left[ \cos\gamma(n)t \cos\gamma(n+1)t + \frac{\varepsilon^2(n+2) \sqrt{(n+1)(n+2)} + \chi^2 n(n+1)}{\gamma(n)\gamma(n+1)} \sin\gamma(n)t \sin\gamma(n+1)t \right] + \sin[(2n+1)\chi t] \left[ \frac{\chi(n+1)}{\gamma(n+1)} \sin\gamma(n+1)t \cos\gamma(n)t - \frac{\chi n}{\gamma(n)} \sin\gamma(n)t \cos\gamma(n+1)t \right] \} \quad (14)$$

将(12)~(14)式代入(11)式,即可得到光场  $\chi_1$  分量的涨落随时间的演化,下面我们通过数值计算来讨论 Kerr 介质对光场压缩效应的影响。

由图 1(a) 可看到,当  $\chi = 0$  时,即不考虑腔中 Kerr 介质影响的情形。这时模型(2)式便是通常的依赖强度耦合的 J-C 模型<sup>[4]</sup>。当  $\chi = 10^{-3}\varepsilon$  时,如图 1(b) 所示,在  $et < 4$  这一时间区域内,  $Q_1$  随时间的演化规律与  $\chi = 0$  相似,而在  $et > 4$  区域内其值明显增大,这是 Kerr 介质和原子与光场共同作用的结果,但比较图 1(a), (b) 可以发现,光场  $\chi_1$  分量被压缩的程度和压缩出现的时间都不因 Kerr 效应的影响而发生明显的变化。

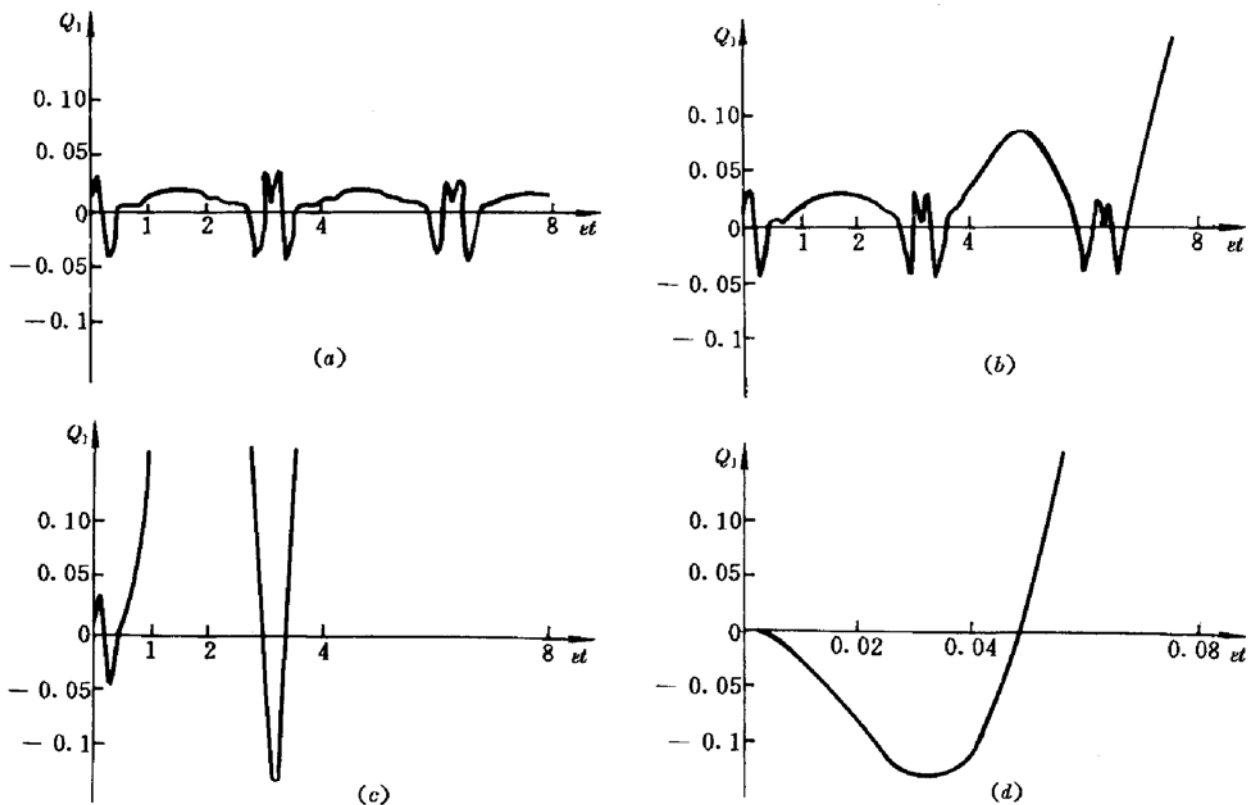


Fig. 1 Time evolution of the function  $Q_1$  describing the degree of the squeezing of light for  $n = 8$

(a)  $\chi = 0$ ; (b)  $\chi = 10^{-3}\varepsilon$ ; (c)  $\chi = 10^{-2}\varepsilon$ ; (d)  $\chi = \varepsilon$

由图 1(c) 可发现,随着 Kerr 效应的强度增强,  $Q_1$  随时间的演化规律发生明显的变化,光场  $\chi_1$  分量的压缩程度明显增强,这一结果表明在腔中 Kerr 效应的这一强度区域 ( $10^{-3}\varepsilon < \chi < 10^{-2}\varepsilon$ ) 内与依赖强度耦合的 J-C 模型 ( $\chi = 0$ ) 相比光场的压缩效应因 Kerr 介质—光场—原子的共同作用而增强。

值得注意的是 Buzek 等人<sup>[7,8]</sup>在研究 Kerr 效应对 J-C 模型中光场压缩特性的影响时发现,在极弱的 Kerr 效应影响下光场的压缩明显地减弱,以致于几乎消失,而我们的结果表明:当腔中 Kerr 效应很弱时,光场的压缩效应与依赖强度耦合的 J-C 模型 ( $\chi = 0$ ) 相似,当满足  $10^{-3}\varepsilon < \chi < 10^{-2}\varepsilon$  时光场的压缩程度明显增强,由 Kerr 介质—光场—原子的共同作用决定。这一结果显然与 Buzek 等人的结论不同。导致这一差别的原因是由于原子与光场的耦合过程是依赖于光场强度  $[\varepsilon(a\sqrt{a^+}a S_+ + \sqrt{a^+}a a^+ S_-)]$  的,在这种耦合过程中,光场与原子间的相互作用是非线性的相互作用,从而导致 Kerr 效应对光场性质的影响与 B-J 模型不同。值得指出的是,我们早先在研究 Kerr 效应对双光子 J-C 模型中光场压缩特性的影响时发现,当  $\chi$  满足  $10^{-3}\varepsilon < \chi < 10^{-2}\varepsilon$  时,光场的压缩程度明显增强<sup>[9]</sup>,与本文的结论是一致的,这表明在依赖强度耦合的 J-C 模型中不仅原子的崩溃回复规律与双光子 J-C 模型相似<sup>[10]</sup>,而且光场的量子性质也展现出与双光子 J-C 模型有相似的性质。所以,对于光场与原子的非线性相互作用系统,一定强度的 Kerr 效应可导致光场压缩程度的增加。因此,我们这里的研究结果对于压缩光场的制备是有意义的。

当  $\chi = \varepsilon$  时〔图 1(d)〕,此时, Kerr 效应较强,光场只是在一很短的时间区域内出现压缩。这表明此时影响光场压缩性质的主要原因是 Kerr 介质与光场的作用,而二能级原子与光场的作用对光场压缩性质的影响可以忽略,其原因是当失谐量  $\chi n$  满足强非线性耦合条件  $\chi^2 n^2 \gg \varepsilon^2 (n+1)^2$  时,使得初始处于激发态的原子发生激发能量的相干捕获<sup>[11]</sup>,从而导致原子—光场耦合很弱,使原子—光场的耦合对光场压缩性质的影响可以忽略,而光场性质完全由 Kerr 介质—光场的作用决定。

#### 4 Kerr 效应对原子偶极压缩的影响

原子的偶极压缩效应反映了光场—原子耦合系统中原子的重要性质。为了讨论 Kerr 效应对原子偶极压缩效应的影响,我们定义两个相互正交的厄米算符

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}[S_+ \exp(-i\omega_0 t) + S_- \exp(i\omega_0 t)] \\ S_2 = \frac{1}{2i}[S_+ \exp(-i\omega_0 t) - S_- \exp(i\omega_0 t)] \end{cases} \quad (15)$$

这里  $S_1, S_2$  分别对应于原子偶极短的色散和吸收分量。它们满足 Heisenberg 测不准关系

$$\langle (\Delta S_1)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta S_2)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle S_z \rangle|^2 \quad (16)$$

若系统存在某个状态使得

$$F_i = \langle (\Delta S_i)^2 \rangle - \frac{1}{2} |\langle S_z \rangle| < 0 \quad (i = 1 \text{ 或 } 2) \quad (17)$$

则说明原子偶极的  $S_i (i = 1 \text{ 或 } 2)$  分量的“涨落”被压缩,即原子存在压缩效应。利用(4)~(6)式可求出

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} e^{-\bar{n}} \sum_n \frac{\bar{n}^n}{n!} \left\{ \frac{\varepsilon^2 (n+1)^2}{\gamma^2(n)} \cos[2\gamma(n)t] + \frac{\chi^2 n^2}{\gamma^2(n)} \right\} \quad (18)$$

$$\langle S_+ \rangle = -i \sum_n \exp[i(2n+1)\chi t - \varphi] e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^{(n+1/2)}}{n!} \cdot \left[ \cos\gamma(n+1)t - \frac{i\chi(n+1)}{\gamma(n+1)} \sin\gamma(n+1)t \cdot \frac{\varepsilon \sqrt{n+1}}{\gamma(n)} \sin\gamma(n)t \right] \quad (19)$$

将(18),(19)式代入(17)式,并利用  $S_+ = S_-$  (取  $\varphi = 0$ ),再通过数值计算,便可得知原子算符压缩参量  $F_2$  随时间的演化规律。以下,我们以  $F_2$  为例来讨论 Kerr 介质对原子偶极压缩的影响,其结果如图 2 所示。

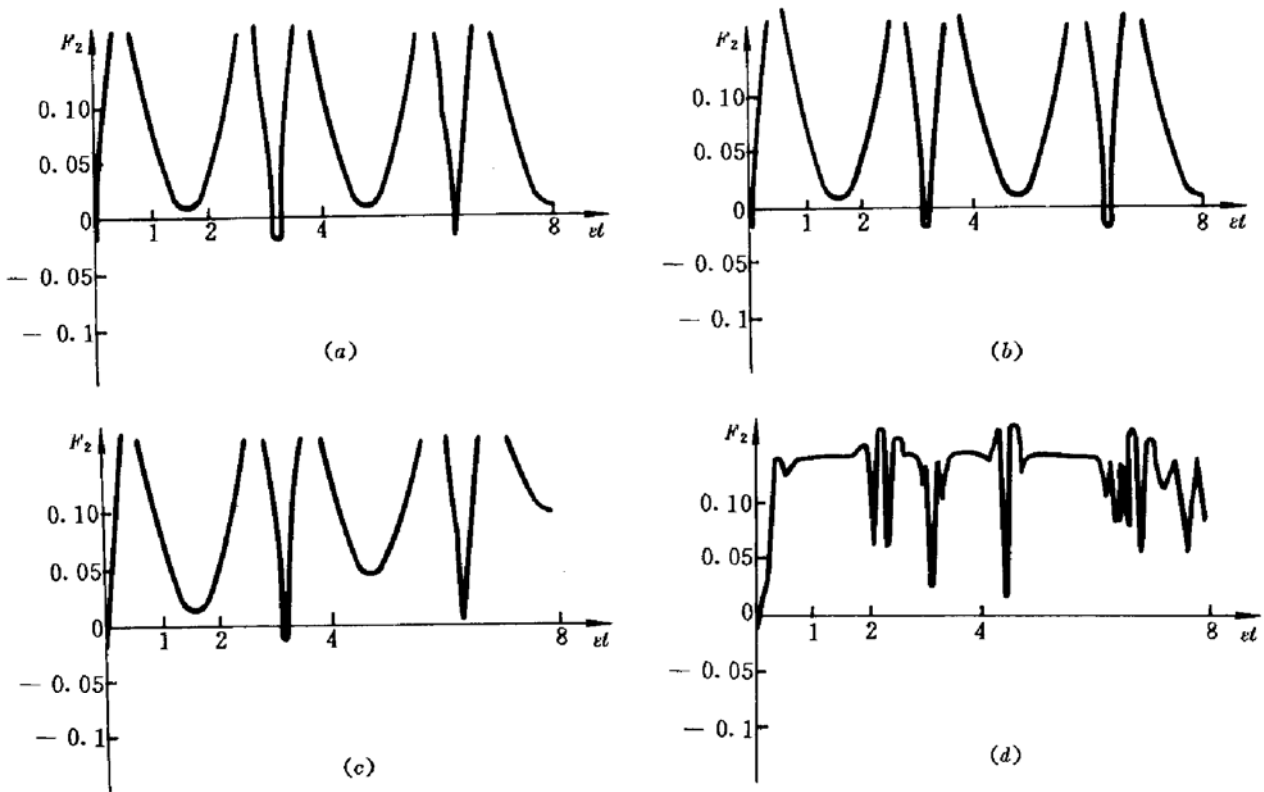


Fig. 2 Time evolution of the function  $F_2$  describing the degree of atomic dipole squeezing for  $n = 8$

(a)  $\chi = 0$ ; (b)  $\chi = 10^{-5}\varepsilon$ ; (c)  $\chi = 5 \times 10^{-3}\varepsilon$ ; (d)  $\chi = \varepsilon$

图 2(a) 显示了在  $\chi = 0$  时,即不考虑 Kerr 介质效应的影响情况下,原子偶极压缩的情况。此时  $F_2 < 0$ ,这表明原子偶极矩的吸收分量的涨落被压缩。当  $\chi = 10^{-5}\varepsilon$  时[图 2(b) 所示], $F_2$  随时间的演化规律与  $\chi = 0$  时相似。这表明在 Kerr 效应极弱的情况下,原子偶极压缩效应不因腔中 Kerr 效应而发生变化,其性质由光场—原子的耦合决定,这一特点与光场的压缩效应相似。

从图 2(c) ( $\chi = 5 \times 10^{-3}\varepsilon$ ) 和图 2(d) ( $\chi = \varepsilon$ ) 可看出,随着 Kerr 效应逐渐增强,原子偶极压缩效应逐渐减弱,以至几乎消失。这表明 Kerr 效应对原子偶极压缩效应起着减弱作用。其原因是因为原子偶极矩反映的是原子基态和激发态之间的自干涉程度<sup>[12]</sup>,随着  $\chi$  的增大,原子—光场间的失谐量增大,导致原子—光场间的耦合减弱,使得原子处于激发态的概率增大,而跃迁到基态的概率减小,导致自干涉程度减弱,从而使原子的偶极压缩效应逐渐减弱。

通过分析图 2 可看到,原子的偶极压缩效应是随着 Kerr 效应的增强而逐渐减弱的,这表明充满 Kerr 介质的腔中,原子偶极压缩效应强烈地依赖于 Kerr 效应的强度。

类似的通过对  $F_1$  随时间演化的讨论, 可得知 Kerr 介质对原子偶极的色散分量 ( $S_1$ ) 的影响也有相似的特征。

## 5 结 论

总之, 我们讨论了充满 Kerr 介质的高  $Q$  腔中依赖强度耦合的 J-C 模型中光场和原子偶极矩的压缩效应。结果表明, 腔中极弱的 Kerr 效应对光场和原子偶极的压缩效应的影响可以忽略, 而当  $10^{-3}\epsilon < \chi < 10^{-2}\epsilon$  时, 光场的压缩效应因 Kerr 效应而增强, 原子偶极压缩效应则明显减弱, 如果 Kerr 效应较强时, 光场的压缩效应由 Kerr 介质决定, 原子的偶极压缩效应几乎消失。我们的结果还表明: Kerr 效应对依赖强度耦合的 J-C 模型中光场和原子偶极压缩效应的影响与单光子 J-C 模型有明显的不同, 对于我们所讨论的模型而言, 一定强度的 Kerr 效应将导致光场压缩程度的增强, 因此, 在利用原子—光场相互作用系统制备压缩光场时, 附加合适的 Kerr 介质是有益的。

## 参 考 文 献

- 1 E. T. Jaynes, F. W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to beam master. *Proc. IEEE*, 1963, **51**: 89~109
- 2 R. Loudon, P. L. Knight. Squeezed light. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**: 709~759
- 3 周 鹏, 彭金生. 双光子 J-C 模型中原子的压缩效应. *物理学报*, 1989, **38**: 2044~2048
- 4 B. Buck, C. V. Sukumar. Exactly soluble model of atom-photon coupling showing periodic decay and revival. *Phys. Lett. A*, 1981, (2/3): 132~135
- 5 P. Zhou, J. S. Peng. Effect of atomic coherence on the collapses and revivals in some generalized Jaynes-Cummings models. *J. Mod. Opt.*, 1992, **39**(1): 49~62
- 6 V. Buzek. Light squeezing in the Jaynes-Cummings model with intensity-dependent coupling. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(9): 1151~1162
- 7 V. Buzek, I. Jex. Dynamics of a two-level atom in a Kerr-like medium. *Opt. Commun.*, 1990, **78**: 425~435
- 8 P. Gora, C. Jerdazek. Nonlinear Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**: 6816~6828
- 9 李高翔, 彭金生. Kerr 效应对双光子 J-C 模型中光场和原子偶极压缩效应的影响. *华中师范大学学报*, 1993, **27**(3): 298~305
- 10 周 鹏, 彭金生. 多光子 Jaynes-Cummings 模型的演化. *光学学报*, 1990, **10**(9): 832~844
- 11 A. Joshi, P. P. Puri. Dynamical evolution of the two-photon Jaynes-Cummings model in a Kerr-like medium. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**: 5056~5060
- 12 P. Zhou, J. S. Peng. Dipole squeezing in the two-photon Jaynes-Cummings model with superposition state preparation. *Phys. Rev. A*, 1991, **44**: 3331~3335

## Influence of the Kerr Effect on the Squeezing of the Atomic Dipole Squeezing in the J-C Model with Intensity-dependent Coupling

Xu Dahai Wu Meijun Peng Jinsheng

(Department of Physics Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

**Abstract** In this paper, we have investigated the squeezing of light and atomic dipole squeezing in the J-C model with Kerr medium. We found that suitable intensity Kerr effect will lead to increase the squeezing of light but with Kerr effect increase the atomic dipole squeezing will clearly reduce and finally almost to disappear.

**Key words** Kerr effect, intensity-dependent coupling J-C model, squeezing phenomenon