

梯度折射率棒中传播的高斯光束轨迹解析解 及其存在条件的讨论*

廖廷佛

(福建师范大学激光研究所, 福州 350007)

提要 本文提出光束轨迹方程的一般解, 导出解析解的存在条件, 推广了文献[1]的光线传播理论, 文中以一特定梯度折射率棒为例, 讨论了高斯光束在棒中的传播特性。

关键词 梯度折射率光学, 高斯光束, 光束传播, 自聚焦棒透镜

1 引 言

在激光光电子装置中采用梯度折射率棒透镜不仅可以改善光学系统的像质性能, 还可使仪器装置的结构和体积小型化、微型化, 因此, 梯度折射率棒透镜在激光光盘系统、激光照排装置、光通信系统中具有广阔的应用前景。研究高斯激光束在梯度折射率棒中的传播理论是开拓梯度折射率棒透镜在激光光电子装置中应用的重要基础。近来, 已有若干文献报道了梯度折射率棒(纤维)中的光传输特性^[1~3]。对梯度折射率微小器件的原理与设计也作了探讨^[4~6]。本文进一步研究高斯光束在梯度折射率棒中的传播, 提出光束轨迹方程的一般解, 导出解析解的存在条件, 从而把文献[1]的光线传播理论推广至高斯激光光束传播情形, 并讨论了高斯光束在一种非圆柱形梯度折射率棒中的传播特性。

2 近轴波动方程及其解

在弱非匀质条件下, 光在梯度折射率棒中的传播遵循标量波动方程

$$\nabla^2 \psi + n^2(x, y, z)k^2 \psi = 0 \quad (1)$$

式中 $k = n_0 \omega / c = 2\pi / \lambda$ 为波数, $n(x, y, z)$ 为梯度折射率棒的折射率分布, 且

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 [1 - g^2(z)(x^2 + y^2)] \quad (2)$$

其中 $n_0 = n(0, 0, z)$ 为梯度棒轴上折射率, $g(z)$ 为梯度棒轴向折射率梯度参数。

设方程(1)的解为

$$\psi(r, z) = A(r, z) \exp(-ikz) \quad (3)$$

取柱坐标系 (r, z) , 将(3)式代入(1)式, 计及 WKB 近似条件 $|\partial^2 A / \partial z^2| \ll |k(\partial A / \partial z)|$, 并忽略

* 福建省自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1992 年 12 月 3 日, 收到修改稿日期: 1993 年 4 月 12 日

与 $\partial^2 A / \partial z^2$ 有关的项, 得到如下近轴波动方程^[7]

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - k^2 g^2(z) r^2 A = 0 \quad (4)$$

再设方程(4)的试探解为

$$A(r, z) = \frac{E_0}{f(z)} \exp \left[-ik \frac{r^2}{R(z)} - \frac{r^2}{w_0^2 f^2(z)} - ik\phi_0(z) \right] \quad (5)$$

式中 E_0 为入射波场初始振幅, w_0 为入射高斯光束的束腰光斑半径, $r^2 = x^2 + y^2$, $\phi_0(z)$ 为位相函数, $R(z)$ 为波面曲率半径, 且

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{1}{f(z)} \frac{df(z)}{dz} \quad (6)$$

$f(z)$ 为描述高斯光束光斑半径 $w(z)$ 的无量纲函数, 它由如下方程确定

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + g^2(z) f(z) = \frac{1}{Z_0^2 f^3(z)} \quad (7)$$

式中 $Z_0 = \pi w_0^2 / \lambda$ 为光束瑞利距离。方程(7)是描述高斯光束传播轨迹的微分方程, 称为“光束轨迹方程”。在 $\lambda \rightarrow 0, Z_0 \rightarrow \infty$ 的几何光学近似条件下, 高斯光束化为几何光线, 方程(7)化为近轴光线方程^[8]

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + g^2(z) f(z) = 0 \quad (8)$$

鉴于高斯光束轨迹方程(7)与光线方程(8)间的对应关系, 与光线传播特性的研究类似, 研究高斯光束在梯度折射率棒中的传播问题化为光束轨迹方程(7)的求解问题。对给定的折射率分布, $g(z)$ 一定, 从方程(7)解得 $f(z)$, 再由(5), (6)式推知高斯光束的传播规律, 故如何获得方程(7)的解析解 $f(z)$ 成为问题的关键。

3 光束轨迹解析解的存在条件

仿光线方程的解析解^[1], 并参考文献[2, 3]的有关结果, 我们提出光束轨迹方程(7)的解为

$$f^2(z) = [g_0/g(z)] \{ [A \sin(2b\xi) + B \cos(2b\xi) + C] + [(A/b) \sin(b\xi)]^2 \} \quad (9)$$

式中 $g_0 = g(0)$, L, b 为常数, ξ 为

$$\xi(z) = \frac{1}{g_0 L} \int_0^z g(z) dz \quad (10)$$

$A = L/Z_0$, 为一描述衍射传播效应的参数。当 $A \rightarrow 0$ 时, (9)式化为光线方程(8)的解, 且满足如下初始条件

$$f(0) = 1, \quad \left. \frac{1}{f} \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = \frac{1}{R_0} \quad (11)$$

将(9)式代入(11)式, 求得系数

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{b} \left[\frac{L}{R_0} + \frac{L}{2} \frac{\dot{g}(0)}{g_0} \right] \\ B &= \frac{1}{2} (1 - A^2) \\ C &= \frac{1}{2} (1 + A^2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将(9)式代入方程(7)得如下非线性微分方程

$$\ddot{g}(z)g(z) - \frac{3}{2}\dot{g}^2(z) + 2(b^2/g_0^2L^2 - 1)g'(z) = 0 \quad (13)$$

方程(13)即为光束轨迹方程(7)存在解析解(9)的必要条件,只要 $g(z)$ 满足条件(13),则高斯光束在梯度折射率棒中的传播可由解析式(9)及(5),(6)式描述。

不难证明,满足条件(13)的梯度折射率棒及其 $g(z)$ 函数的有

1) 锥形梯度折射率棒^[8], $b^2 = g_0^2L^2 - 1/4$

$$g(z) = g_0/(1 \pm z/L) \quad (14a)$$

2) 抛物型梯度折射率棒^[2], $b^2 = g_0^2L^2 - 1$

$$g(z) = g_0/(1 - z^2/L^2) \quad (14b)$$

3) 逆抛物型梯度折射率棒^[3], $b^2 = g_0^2L^2 + 1$

$$g(z) = g_0/(1 + z^2/L^2) \quad (14c)$$

高斯光束在上述梯度折射率棒中的传播轨迹已分别由文献[2,3,8]讨论过,这些结果系为(9)式的三个特例。

4 一个特解的讨论

现考虑方程(13)的另一个特解,令 $b = g_0L$,则(13)式化为

$$\ddot{g}(z)g(z) - \frac{3}{2}\dot{g}^2(z) = 0 \quad (15)$$

解方程(15)得

$$g(z) = g_0/(1 \pm z/L)^2 \quad (16)$$

折射率分布由(2),(16)式确定的梯度折射率棒称为平移抛物型梯度折射率棒,它与锥形梯度棒类似, $g(z)$ 满足 $g^{\pm}(L) \rightarrow \infty$ 。此时 L 为梯度棒之端面($z=0$)到梯度棒之顶点($z=L$)间的距离,在 $z=L$ 处,等折射率面渐缩为一个点。因此,也把这种梯度折射率棒称为广义锥形梯度折射率棒(或纤维)。

将(16)式的 $g(z)$ 代入(9)和(10),(12)式求得

$$f^2(z) = \left(1 \pm \frac{z}{L}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2b^2} [b^2 + A^2 + (L/R_0 \mp 1)^2] + \frac{1}{2b^2} [b^2 - A^2 - (L/R_0 \mp 1)^2] \cdot \cos\left(\frac{2g_0z}{1 \pm z/L}\right) + \frac{1}{b} (L/R_0 \mp 1) \sin\left(\frac{2g_0z}{1 \pm z/L}\right) \right\} \quad (17)$$

讨论 $g(z) = g_0/(1 - z/L)^2$ 情形,对于高斯平面波入射,令 $R_0 \rightarrow \infty$,则从(17)式得

$$f^2(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2b^2} (b^2 + A^2 + 1) + \frac{1}{2b^2} (b^2 - A^2 - 1) \cos\left(\frac{2g_0z}{1 - z/L}\right) + \frac{1}{b} \sin\left(\frac{2g_0z}{1 - z/L}\right) \right\} \quad (z < L) \quad (18)$$

下面先讨论光斑变化规律的几种特殊情形:

1) 在 $A \rightarrow 0$ 的几何光学近似条件下,(18)式化为

$$f^2(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2b^2} (b^2 + 1) + \frac{1}{2b^2} (b^2 - 1) \cos\left(\frac{2g_0z}{1 - z/L}\right) + \frac{1}{b} \sin\left(\frac{2g_0z}{1 - z/L}\right) \right\} \quad (19a)$$

或

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right) \left\{ \cos\left(\frac{2g_0z}{1 - z/L}\right) + \frac{1}{b} \sin\left(\frac{2g_0z}{1 - z/L}\right) \right\} \quad (19b)$$

(19)式即文献[1]的光线轨迹 $H_2(z)$ 。

2) 当 $A^2 \ll b^2$ 或 $w_0 \gg (\lambda b/\pi b)^{1/2}$ 时,(18)式中含 A^2 项可忽略,从而也化为(19)式,此即准几

何光学近似传播,这时波动光学效应不明显,可忽略。

3) 当 $A^2 \gg b^2$ 或 $w_0 \ll (\lambda L/\pi b)^{1/2}$ 时, (18) 式中含 b^2 项可忽略,从而得到

$$f^2(b) = \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \left\{ \frac{A^2 + 1}{b^2} \sin^2\left(\frac{g_0 z}{1 - z/L}\right) + \frac{1}{b} \sin\left(\frac{2g_0 z}{1 - z/L}\right) \right\} \quad (20)$$

由于 $A^2 \gg b^2 > 1$, 故(20)式中第二项与第一项相比可忽略,从而化为

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right) \frac{1}{Z_0} \left(\frac{L}{b}\right) \sin\left(\frac{g_0 z}{1 - z/L}\right) \quad (21)$$

此即文献[1]的光线传播轨迹 $H_1(z)$ 。因此, $A \gg b$ 可视为高斯激光束的点光源近似条件,这也是一种几何光学近似情形。

4) 当 $A^2 = b^2 - 1$ 即 $w_0 = [\lambda L/\pi(b^2 - 1)^{1/2}]^{1/2}$ 时, (18) 式化为

$$f^2(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{b} \sin\left(\frac{2g_0 z}{1 - z/L}\right) \right\} \quad (22)$$

由于 $b = g_0 L$ 较大,可以认为 $1/b \ll 1$, (22) 式中第二项对 $f^2(z)$ 的影响甚小,可以忽略,于是化为

$$f(z) = (1 - z/L) \quad (23)$$

这表明光斑尺寸近似按线性减小,并渐趋于零。这是一种特殊而有趣的光传输现象。

对于一般的高斯光束传播,可分为 $A < (b^2 - 1)^{1/2}$ 和 $A > (b^2 - 1)^{1/2}$ 两种情形。如图 1 所示为高斯光束在这种广义锥形梯度折射率棒中的传播。图中曲线 a, b, c 分别对应于 $A <, =, > (b^2 - 1)^{1/2}$ 三种入射情形。从(18)式和图 1 均可看出,与光在锥形梯度折射率纤维中的传播类似^[8],在广义锥形梯度折射率纤维中传播的高斯光束光斑呈变幅值、变周期的正弦振荡特征,特别值得一提的是,当 $z \rightarrow L$ 时, $f(z) \rightarrow 0$ 。即高斯光束在这种梯度折射率棒中传播时光斑被压缩逐渐减小,最后缩小至零。这时光强最为集中。利用这一光传输特性,可设计用作锥形梯度折射率纤维传光器件或光耦合器件^[9]。

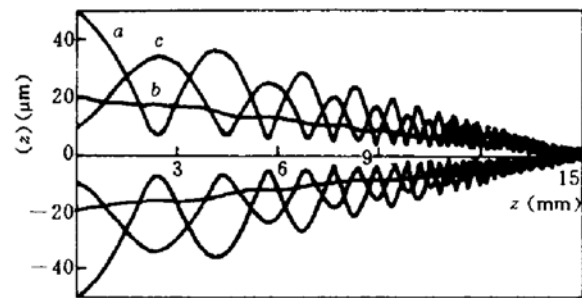


Fig. 1 Gaussian beam spot radius ($g_0 = 0.50, L = 15$)
(a) $w_0 = 50 \mu\text{m}$; (b) $w_0 = 20 \mu\text{m}$; (c) $w_0 = 10 \mu\text{m}$

高斯光束光斑极值位置沿 z 轴呈变周期分布,其极值点坐标可先由(18)式求出 df^2/dz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{df^2}{dz} = & -\frac{1}{L} \left(1 - \frac{z}{L}\right) \left\{ \frac{1}{2b^2} (b^2 + A^2 + 1) + \frac{1}{2b^2} (b^2 - A^2 - 1) \cos\left(\frac{2g_0 z}{1 - z/L}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{b} \sin\left(\frac{2g_0 z}{1 - z/L}\right) \right\} - \frac{1}{2Lb} (b^2 - A^2 - 1) \sin\left(\frac{2g_0 z}{1 - z/L}\right) + \frac{1}{L} \cos\left(\frac{2g_0 z}{1 - z/L}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

再由(24)式及 $df^2/dz = 0$ 条件,用数值迭代法确定光斑极大值或极小值点的坐标位置 z_m 。

将(18), (24)式代入(6)式:

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{1}{2f^2(z)} \frac{df^2(z)}{dz} \quad (25)$$

可得波面曲率半径的解析式。由此可计算作出在梯度折射率棒中传播的高斯光束波面曲率半径随传播距离的变化曲线,如图 2 所示。图中 $R(z) < 0$ ($df/dz < 0$) 对应于高斯光束的会聚传播;而 $R(z) > 0$ ($df/dz > 0$) 对应于高斯光束的发散传播。 $R(z_m) \rightarrow \infty$ 的点则对应于高斯光束光

斑极小值和极大值的位置。不难看出,曲率半径的变化也呈变周期特性。由(5),(18)式可求出高斯光束强度分布

$$I(r, z) = |A(r, z)|^2 = \frac{I_0}{f^2(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2 f^2(z)}\right) \quad (26)$$

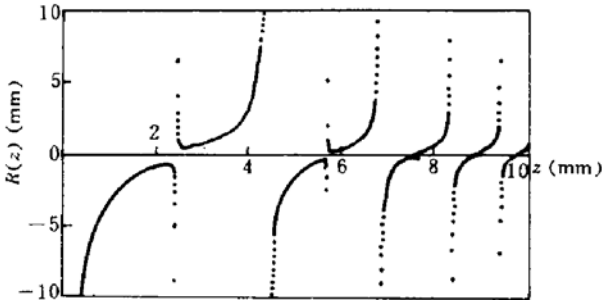


Fig. 2 Gaussian beam wavefront curvature radius
($g_0 = 0.50$, $L = 15$, $w_0 = 50 \mu\text{m}$)

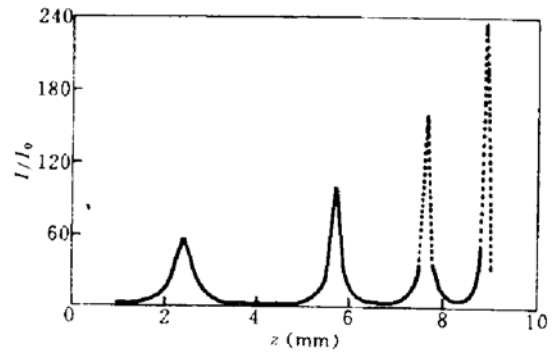


Fig. 3 Gaussian beam on-axis intensity distribution
($g_0 = 0.50$, $L = 15$, $w_0 = 50 \mu\text{m}$)

图 3 给出了高斯光束轴上点 ($r \equiv 0$) 光强分布

$$I(0, z) = \frac{I_0}{f^2(z)} = \frac{1}{(1 - z/L)^2} \cdot \left\{ \frac{1}{2b^2}(b^2 + A^2 + 1) + \frac{1}{2b^2}(b^2 - A^2 - 1) \cos\left(\frac{2g_0 z}{1 - z/L}\right) + \frac{1}{b} \left(\frac{2g_0 z}{1 - z/L}\right) \right\}^{-1} \quad (27)$$

图中诸光强极大值点对应于光斑极小值点,即高斯光束会聚点位置。

参 考 文 献

- 1 C. Gomez-Reino *et al.*. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(24): 4375~4379
- 2 廖廷佛, 黄衍堂. *量子电子学*, 1992, **9**(3): 288~294
- 3 廖廷佛. *激光技术*, 1992, **16**(4): 242~251
- 4 廖廷佛. *光学学报*, 1991, **11**(4): 347~352
- 5 I. Kitano. *Appl. Opt.*, 1990, **29**(28): 3992~3997
- 6 廖廷佛. *光通信技术*, 1992, **16**(3): 198~202
- 7 M. S. Sodha, A. K. Ghatak. New Yorks: *Inhomogeneous Optical Waveguides*, Plenum Press, 1977. 96
- 8 殷宗敏, 姚 圩. *光子学报*, 1992, **21**(3): 254~260
- 9 刘德森 等编著. *纤维光学*. 第 1 版. 北京: 科学出版社, 1987 年 2 月. 240~241

Discussion on Analytical Solution for Gaussian Beam Path in Gradient Index Rods and its Existing Condition

Liao Tingdi

(*Institute of Lasers, Fujian Normal University, Fuzhou 350007*)

Abstract A general solution for beam path equation is proposed and the condition for the existence of analytical solution is derived. The ray propagation theory of Ref. [1] is generalized. Finally, as an example, the characteristics of Gaussian beam propagation in a particular gradient index rod is also discussed.

Key words gradient index (GRIN) optics, Gaussian beam, beam optics, selfoc rod lens