

双曝光散斑照相全场条纹的对比度函数

程传福

(山东师范大学物理系, 济南 250014)

姜锦虎

(苏州大学物理系, 苏州 213006)

摘要 本文用随机光场自相关函数传递的方法对双曝光散斑图在全场分析光路中形成的像面光强进行了严格计算, 得出了条纹对比度与滤波孔的形状和位移之间的函数关系, 并以方孔和圆孔滤波为例, 从实验上证明了理论结果的正确性。

关键词 条纹对比度函数, 散斑照相, 自相关函数

Contrast function of whole-field fringes for double-exposure speckle photography

CHENG Chuanfu

(Physics Department, Shandong Techers University, Jinan 250014)

JIANG Jinhui

(Physics Department, Suzhou University, Suzhou 213006)

Abstract The transmission of autocorrelation function of random light wave was used to give the rigorous calculation of the image intensity produced by the double-exposure specklegram placed on the input plane of the filtering system, and the fringe contrast as a function of the object displacement and shape of the filtering hole was obtained. The theoretical result was verified by both square and circular hole filterings.

Key words fringe contrast function, speckle photography, autocorrelation function

1 引言

全场分析法^[1,2]作为散斑照相术信息提取的方法已被广泛采用, 但关于条纹对比度的讨论仍是定性的^[3]或半定量的^[4]。本文是全场分析像面光强的一种新的计算方法, 它以统计光学中随机光波的二阶统计理论为基础, 通过置于输入面上的双曝光散斑图的光波的自相关函数在滤波系统中的传递, 完成了对像面光强的严格计算, 得出了全场条纹的对比度函数, 确定了条纹对比度与位移以及滤波孔形状之间的定量关系, 并以圆孔滤波和方孔滤波为例, 对条纹的一些新的性质进行了讨论, 获得实验证实。

2 双曝光散斑图滤波分析的像面平均光强

在激光散斑照相过程中,设表面粗糙的物体位于物平面 $\xi - \eta$ 上,物面光波是 $g_0(\xi, \eta)$,则像平面 $\alpha - \beta$ 内的光场分布为

$$g_1(\alpha, \beta) = h(\alpha, \beta) * g_0(\alpha, \beta) \quad (1)$$

其中 $*$ 表示卷积运算, $h(\alpha, \beta)$ 是成像系统的点扩展函数,为了简化计算,这里已假定成像的放大率 $M = 1$ 。将全息干板置于像面上,进行物体变形前后的双曝光,经线性处理后,得双曝光散斑图。再将该散斑图置于如图 1 所示的滤波光路中的输入面上,用振幅为 1 的相干平行光照明,则紧靠散斑图后的光波为

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta) &= t_1(\alpha, \beta) + t_1(\alpha + u, \beta + v) \\ &\propto I_1(\alpha, \beta) + I_1(\alpha + u, \beta + v) \end{aligned} \quad (2)$$

$t_1(\alpha, \beta)$ 是散斑照相时单次曝光引起的散斑图的振幅透过率, $I_1(\alpha, \beta) = |g_1(\alpha, \beta)|^2$ 是物体变形前像面的光强分布, u, v 是位移场分量。如果不计滤波系统的像差,则它是一个线性空间不变系统^[5],输出面 xy 上的光振幅分布为

$$B(x, y) = B_1(x, y) + B_1(x + u, y + v) \quad (3)$$

$B_1(x, y)$ 是由 $t_1(\alpha, \beta)$ 引起的输出面上的光波。如果 $B_1(x, y)$ 是平稳的随机过程,输出面上光强的空间平均等于其系统平均,即

$$\begin{aligned} \overline{I_B(x, y)} &= \langle B(x, y)B^*(x, y) \rangle \\ &= 2\bar{I}_1 + R_{B_1}(x, y; x + u, y + v) + R_{B_1}^*(x, y; x + u, y + v) \end{aligned} \quad (4)$$

$$R_{B_1}(x, y; x + u, y + v) = \langle B_1(x, y)B_1^*(x + u, y + v) \rangle \quad (5)$$

其中是 $B_1(x, y)$ 的自相关函数, $\bar{I}_1 = \langle |B(x, y)|^2 \rangle = \langle |B_1(x + u, y + v)|^2 \rangle$ 为 $B_1(x, y)$ 的平均强度。由(4), (5)两式可知,平均光强的计算关键在于计算与单次曝光相对应的光波 $B_1(x, y)$ 的自相关函数 R_{B_1} 。下面分两步来进行计算。第一步根据输入面光场的自相关函数求谱面的自相关函数 R_f , 第二步再由 R_f 求出 R_{B_1} 。根据(2)式及成像几何的散斑强度的自相关函数公式^[6]知,输入面上光波的自相关函数等于散斑照相过程中像面光强的自相关函数,即

$$\begin{aligned} R_{t_1}(\alpha, \beta; \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) &= \langle t_1(\alpha, \beta)t_1^*(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) \rangle \\ &= R_{I_1}(\Delta\alpha, \Delta\beta) = \phi^2(\alpha, \beta) \left[1 + \frac{1}{C^2} \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 e^{i(2\pi/\lambda_0 d_i)(\xi_L \Delta\alpha + \eta_L \Delta\beta)} d\xi_L d\eta_L \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (6)$$

上式中 $\phi(\alpha, \beta) = \langle I_1(\alpha, \beta) \rangle$ 为散斑照相时像面的平均光强,它代表散斑图的轮廓函数, (ξ_L, η_L) 是成像透镜平面的坐标, $P(\xi_L, \eta_L)$ 为成像透镜的孔径函数, $C = \iint |P(\xi_L, \eta_L)|^2 d\xi_L d\eta_L$ 为归一化常数, d_i 为像距。与 $t_1(\alpha, \beta)$ 相对应的谱面光波为

$$U_{f_1}(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{+\infty} t_1(\alpha, \beta) e^{-i(2\pi/\lambda f)(x_f \alpha + y_f \beta)} d\alpha d\beta \quad (7)$$

λ_0 和 λ 分别为记录和滤波过程所用的光波波长。谱面光波 $U_{f_1}(x_f, y_f)$ 的自相关函数为

$$R_{U_{f_1}}(x_f, y_f; x_f - \Delta x_f, y_f - \Delta y_f) = \langle U_{f_1}(x_f, y_f)U_{f_1}^*(x_f - \Delta x_f, y_f - \Delta y_f) \rangle$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 f^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} \langle t_1(\alpha, \beta) t_1^*(\alpha', \beta') \rangle e^{-i(2\pi/\lambda f)(\alpha x_f + \beta y_f - \alpha' (x_f - \Delta x_f) - \beta' (y_f - \Delta y_f))} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \quad (8a)$$

作变量替换,令 $\alpha = \alpha' + \Delta\alpha, \beta = \beta' + \Delta\beta$, 并利用(6)式,则上式变为

$$R_{u_f}(x_f, y_f; x_f - \Delta x_f, y_f - \Delta y_f) = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(\alpha', \beta') e^{-i(2\pi/\lambda f)(\alpha' \Delta x_f + \beta' \Delta y_f)} d\alpha' d\beta' \\ \cdot \left[\iint_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{C^2} \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 e^{-i(2\pi/\lambda_0 d_i)(\xi_L \Delta\alpha + \eta_L \Delta\beta)} d\xi_L d\eta_L \right|^2 \right) e^{-i(2\pi/\lambda f)(x_f \Delta\alpha + y_f \Delta\beta)} d\Delta\alpha d\Delta\beta \right] \quad (8b)$$

对上式进行简单运算之后,得谱面光波的自相关函数为

$$R_{u_f}(x_f, y_f; x_f - \Delta x_f, y_f - \Delta y_f) = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(\alpha', \beta') e^{-i(2\pi/\lambda f)(\alpha' \Delta x_f + \beta' \Delta y_f)} d\alpha' d\beta' \\ \cdot \left[\delta\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right) + \frac{\lambda_0^2 d_i^2}{C^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 \left| P\left(\xi_L - \frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} x_f, \eta_L - \frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} y_f\right) \right|^2 d\xi_L d\eta_L \right] \quad (9)$$

由于轮廓函数 $\phi^2(\alpha', \beta')$ 是 α', β' 的慢变化函数,因此,上式中的第一项(即 $\phi^2(\alpha', \beta')$ 的傅里叶变换)是 $\Delta x_f, \Delta y_f$ 的快变化函数;而第二项积分是照相孔径模平方的自相关函数,它是 $x_f, \Delta y_f$ 的慢变化函数。(9)式说明,除中心亮点外,谱面光场的自相关函数是由一个快变化函数与一个慢变化函数的乘积决定的。

若谱面上滤波孔的中心位置坐标为 (x_{f_0}, y_{f_0}) , 滤波孔函数为 $F(x_f - x_{f_0}, y_f - y_{f_0})$, 且滤波孔取得较小(但远大于谱面上的散斑颗粒), 此外为计算方便, 假定函数 $F(x_f, y_f)$ 沿 x_f 和 y_f 轴具有对称性。紧靠滤波孔后的光波为

$$U_{f_1}(x_f, y_f) = U_{f_1}(x_f, y_f) F(x_f - x_{f_0}, y_f - y_{f_0}) \quad (10)$$

则输出面上光波的自相关函数为

$$R_{B_1}(x, y; x + u, y + v) = \langle B_1(x, y) B_1^*(x + u, y + v) \rangle \\ = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x_f' - x_{f_0}, y_f' - y_{f_0})|^2 \langle U_{f_1}(x_f, y_f) U_{f_1}^*(x_f', y_f') \rangle \\ \cdot e^{-i(2\pi/\lambda f)(x_f + y_f - (x+u)x_f' - (y+v)y_f')} dx_f dy_f dx_f' dy_f'$$

上式中,令 $x_f = x_f' - \Delta x_f, y_f = y_f' - \Delta y_f$, 则上式变为

$$R_{B_1}(x, y; x + u, y + v) = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x_f' - x_{f_0}, y_f' - y_{f_0})|^2 \\ \cdot \langle U_{f_1}(x_f' - \Delta x_f, y_f' - \Delta y_f) U_{f_1}^*(x_f', y_f') \rangle e^{i(2\pi/\lambda f)(x \Delta x_f + y \Delta y_f + u x_f' + v y_f')} dx_f' dy_f' d\Delta x_f d\Delta y_f \quad (11) \\ = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x_f' - x_{f_0}, y_f' - y_{f_0})|^2 R_{u_f}^*(x_f', y_f', x_f' - \Delta x_f, y_f' - \Delta y_f) \\ \cdot e^{i(2\pi/\lambda f)(x \Delta x_f + y \Delta y_f + u x_f' + v y_f')} dx_f' dy_f' d\Delta x_f d\Delta y_f$$

利用(9)式,并且注意到在滤波孔内, R_{u_f} 中的缓变函数可用该函数在滤波孔的中心位置 (x_{f_0}, y_{f_0}) 的取值:

$$S(x_{f_0}, y_{f_0}) = \frac{\lambda_0^2 d_i^2}{\lambda^2 f^2 C^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 \left| P\left(\xi_L - \frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} x_{f_0}, \eta_L - \frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} y_{f_0}\right) \right|^2 d\xi_L d\eta_L \quad (12)$$

来代替,从而(11)式可以写为

$$R_{B1}(x, y; x + u, y + v) = \frac{1}{\lambda^2 f^2} S(x_{f_0}, y_{f_0}) \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x_f' - x_{f_0}, y_f' - y_{f_0})|^2 e^{i(2\pi/\lambda f)(ux_f' + vy_f')} dx_f' dy_f' \\ \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[\iint_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(\alpha', \beta') e^{i(2\pi/\lambda f)(\alpha' x_f + \beta' y_f)} d\alpha' d\beta' \right] e^{i(2\pi/\lambda f)(x x_f + y y_f)} dx_f dy_f$$

由傅里叶变换的位移定理和傅里叶积分定理, 上式可以写为

$$R_{B1}(x, y; x + u, y + v) = C_1 \phi^2(-x, -y) \mathcal{F}^{-1}\{|F(x_f, y_f)|^2\} \Bigg|_{\substack{f_x = u/\lambda f \\ f_y = v/\lambda f}} \cdot e^{-i(2\pi/\lambda f)(ux_{f_0} + vy_{f_0})} \quad (13)$$

上式中, $C_1 = (1/\lambda^2 f^2) S(x_{f_0}, y_{f_0})$ 为一常数, $\mathcal{F}^{-1}\{|F(x_f, y_f)|^2\}$ 为 $|F(x_f, y_f)|^2$ 的逆傅里叶变换。根据定义, 当 $u = v = 0$ 时, $R_{B1}(x, y; x, y)$ 变为 $B_1(x, y)$ 的平均强度, 因此(4)式中的平均光强 \bar{I}_1 为

$$\bar{I}_1 = \langle |B_1(x, y)|^2 \rangle = C_1 \phi^2(-x, -y) \cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x_f, y_f)|^2 dx_f dy_f \quad (14)$$

将(13), (14)式代入(4)式, 最后得像面的平均光强

$$\overline{I_B(x, y)} = 2C_1 \phi^2(-x, -y) \left[\iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x_f, y_f)|^2 dx_f dy_f \right. \\ \left. + \mathcal{F}^{-1}\{|F(x_f, y_f)|^2\} \Bigg|_{\substack{f_x = u/\lambda f \\ f_y = v/\lambda f}} \cdot \cos 2\pi \frac{x_{f_0} u + y_{f_0} v}{\lambda f} \right] \quad (15)$$

3 条纹对比度函数及实验验证

将(15)式写成下面的形式

$$\overline{I_B(x, y)} = 2C_1 \phi^2(-x, -y) \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x_f, y_f)|^2 dx_f dy_f \left[1 + V(u, v) \cos 2\pi \frac{x_{f_0} u + y_{f_0} v}{\lambda f} \right] \quad (16)$$

其中

$$V(u, v) = \frac{\mathcal{F}^{-1}\{|F(x_f, y_f)|^2\} \Bigg|_{\substack{f_x = u/\lambda f \\ f_y = v/\lambda f}}}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x_f, y_f)|^2 dx_f dy_f} \quad (17)$$

很显然, 平均光强表达式(16)式给出了轮廓函数内的位移条纹, 这是预料之中的, 而其中的 $V(u, v)$ 是全场条纹的对比度函数。(17)式表明, $V(u, v)$ 是滤波孔函数模平方的傅里叶变换的归一化, 它确定了条纹对比度与位移之间的定量关系, 因而具有普遍意义。由(16)式可知, 在位移分量 $u = v = 0$ 的地方, $V(0, 0) = 1$ 。如果采用硬边滤波孔, 则 $|F(x_f, y_f)|^2 = F(x_f, y_f)$, $\iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x_f, y_f)|^2 dx_f dy_f$ 为滤波孔的面积。

现讨论两种常见的滤波孔:

(a) 方形滤波孔, 孔函数 $F(x_f, y_f) = \text{rect}(x_f/a) \text{rect}(y_f/a)$, 这里 a 为滤波孔的边长, 此时, 条纹对比度函数为

$$V(u, v) = V_s = \text{sinc} \frac{au}{\lambda f} \text{sinc} \frac{av}{\lambda f} \quad (18)$$

(b) 圆孔滤波, 孔函数 $F(x_f, y_f) = \text{circ}(\sqrt{x_f^2 + y_f^2}/r_0)$, r_0 为滤波孔的半径, 则条纹对比度函

数为

$$V(u, v) = V_c = \frac{2J_1(\rho)}{\rho}, \quad \rho = \frac{2\pi r_0}{\lambda f} \sqrt{u^2 + v^2} \quad (19)$$

以上两式表明,方孔滤波时条纹对比度函数是位移分量的 sinc 函数,圆孔滤波时是位移大小的 Bessinc 函数。在这两个函数的主极大内,函数取正值,此时明暗条纹的条件为

$$\begin{aligned} \frac{x_{f_0}u + y_{f_0}v}{\lambda f} = n\pi & \quad \text{亮条纹} \\ \frac{x_{f_0}u + y_{f_0}v}{\lambda f} = (2n + 1)\pi & \quad \text{暗条纹} \end{aligned} \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (20)$$

当位移由 0 不断增大时,条纹对比度逐渐降低,当 u 或 v 增至 $\lambda f/a$ (对方孔滤波),或 $\sqrt{u^2 + v^2}$ 增至 $(0.61\lambda f)/r_0$ 时(对圆孔滤波),条纹对比度降至 0,条纹消失。如果位移继续增大, sinc 和 Bessinc 函数进入 +1 或 -1 级次极大的范围内,函数值是负的,但绝对值是增加的,从而出现条纹对比度的第二峰值。由(16)式知,此时的条纹与主极大内的条纹有 π 的位相差,明暗条纹的条件变为

$$\begin{aligned} \frac{x_{f_0}u + y_{f_0}v}{\lambda f} = 2n\pi & \quad \text{暗条纹} \\ \frac{x_{f_0}u + y_{f_0}v}{\lambda f} = (2n + 1)\pi & \quad \text{亮条纹} \end{aligned}$$

与(10)式给定的条纹出现明暗的反转。

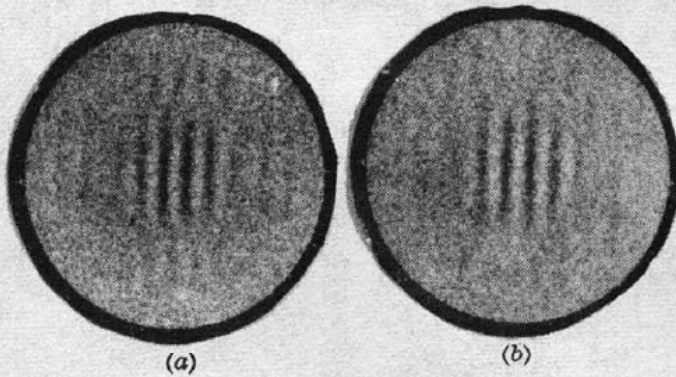


Fig. 2 Fringe patterns of a rotational disk

(a) square-hole filtering; (b) circular-hole filtering

为了证明以上的结论,我们在图 2 中给出了圆盘转动双曝光散斑图的全场条纹照片。(a) 为方孔滤波,(b) 为圆孔滤波;方孔边长和圆孔直径均为 2.4 mm,两种孔的中心在谱面上的位置是相同的,散斑照相与全场分析都使用了 632.8 nm 的 He-Ne 激光。对于圆盘的转动,盘上位置坐标为 (x, y) 点的位移分量 $u = y\Delta\theta, v = x\Delta\theta$,其中 $\Delta\theta$ 是圆盘转动的角度。当 x, y 增大(即远离盘中心)时, u, v 的值是增加的。由图 2(a) 可以看出,使用方孔滤波时,在圆盘中心点($u = v = 0$) 附近处,

条纹的对比度最好;远离盘中心时, u 或 v 逐渐增大,条纹对比度逐渐变差,直到降至 0。再继续向盘的边缘靠近,位移继续增大,进入 sinc 函数的 +1 或 -1 阶极大内,又重新出现条纹,但原来的宽条纹处变成暗条纹,暗条纹处变成亮条纹。由图 2(b) 可以看出,在使用圆孔滤波时,也有同样的现象。但由于 sinc 函数的第一阶次极大的值为 -0.212,而 Bessinc 函数第一阶次极大的值为 -0.132,因此在使用圆孔滤波时,对比度第二峰值范围内的条纹与方孔滤波的情况相比更加不明显。

以上的分析与实验结果表明,现有文献通常认为的条纹对比度降至 0 后不会再有条纹出现的结论是不严格的。

参 考 文 献

- 1 R. P. Khetan, F. P. Chiang, *Appl. Opt.*, **15**, 2205(1976)
- 2 刘宝琛, *实验力学*, **5**(2), 248(1990)

- 3 顾 杰 *et al.*, 中国激光, 14, 607(1987)
 4 J. B. Chen, F. P. Chiang, *J. O. S. A. (A)*, 1, 854(1984)
 5 J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, MCGRAW-HALL, 1968
 6 J. C. 丹蒂, 激光斑纹及有关现象, 科学出版社, 1981, 35~41

附录: (9)式的推导

(8b)

$$R_{\alpha f}(x_f, y_f; x_f - \Delta x_f, y_f - \Delta y_f) = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(\alpha', \beta') e^{-i(2\pi/\lambda f)(\alpha' x_f + \beta' y_f)} d\alpha' d\beta'$$

$$\cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{C^2} \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 e^{-i(2\pi/\lambda_0 d_i)(\xi_L \Delta x_f + \eta_L \Delta y_f)} d\xi_L d\eta_L \right|^2 \right] e^{-i(2\pi/\lambda f)(x_f \Delta x_f + y_f \Delta y_f)} d\Delta x_f d\Delta y_f \quad (A1)$$

(8b) 最后一项积分为

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{C^2} \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 e^{-i(2\pi/\lambda_0 d_i)(\xi_L \Delta x_f + \eta_L \Delta y_f)} d\xi_L d\eta_L \right|^2 e^{-i(2\pi/\lambda f)(x_f \Delta x_f + y_f \Delta y_f)} d\Delta x_f d\Delta y_f$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{C^2} \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 e^{-i2\pi(f_\xi \xi_L + f_\eta \eta_L)} d\xi_L d\eta_L \right|^2 e^{-i(2\pi/\lambda f)(x_f \Delta x_f + y_f \Delta y_f)} d\Delta x_f d\Delta y_f$$

$$\left(\text{其中 } f_\xi = \frac{\Delta x_f}{\lambda_0 d_i}, \quad f_\eta = \frac{\Delta y_f}{\lambda_0 d_i} \right)$$

$$= \frac{1}{C^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left| \mathcal{F} \{ |P(\xi_L, \eta_L)|^2 \} \right|^2_{f_\xi, f_\eta} e^{-i(2\pi/\lambda f)(x_f \Delta x_f + y_f \Delta y_f)} d\Delta x_f d\Delta y_f$$

$$= \frac{1}{C^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |G(f_\xi, f_\eta)|^2 e^{-i(2\pi/\lambda f)(x_f \Delta x_f + y_f \Delta y_f)} d\Delta x_f d\Delta y_f \quad (A2)$$

(A2) 式的结果是 $|G(f_\xi, f_\eta)|^2$ 的傅里叶变换, 令 $g(f_x, f_y)$ 是 $G(f_\xi, f_\eta)$ 的傅里叶变换, 即

$$g(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(f_\xi, f_\eta) e^{-i(2\pi/\lambda f)(x_f \Delta x_f + y_f \Delta y_f)} d\Delta x_f d\Delta y_f \quad (A3)$$

其中 $f_x = \frac{x_f}{\lambda f}$, $f_y = \frac{y_f}{\lambda f}$, 将 $G(f_\xi, f_\eta)$ 的表达式代入上式

$$g(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[\iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 e^{-i(2\pi/\lambda_0 d_i)(\xi_L \Delta x_f + \eta_L \Delta y_f)} d\xi_L d\eta_L \right] e^{-i(2\pi/\lambda f)(x_f \Delta x_f + y_f \Delta y_f)} d\Delta x_f d\Delta y_f$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 d\xi_L d\eta_L \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi[\Delta x_f(\xi_L/\lambda_0 d_i + x_f/\lambda f) + \Delta y_f(\eta_L/\lambda_0 d_i + y_f/\lambda f)]} d\Delta x_f d\Delta y_f$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 \delta \left(\frac{\xi_L}{\lambda_0 d_i} + \frac{x_f}{\lambda f}, \frac{\eta_L}{\lambda_0 d_i} + \frac{y_f}{\lambda f} \right) d\xi_L d\eta_L$$

$$= \lambda_0^2 d_i^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta \left(\xi_L + \frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} x_f, \eta_L + \frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} y_f \right) |P(\xi_L, \eta_L)|^2 d\xi_L d\eta_L$$

$$= \lambda_0^2 d_i^2 \left| P \left(-\frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} x_f, -\frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} y_f \right) \right|^2$$

$$= \lambda_0^2 d_i^2 |P(-\lambda_0 d_i f_x, -\lambda_0 d_i f_y)|^2 \quad (A4)$$

由傅里叶变换的自相关定理, $|G(f_\xi, f_\eta)|^2$ 的傅里叶变换等于 $G(f_\xi, f_\eta)$ 傅里叶变换的自相关运算, 这样(A2) 式的结果为

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{C^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |G(f_\xi, f_\eta)|^2 e^{-i(2\pi/\lambda f)(x_f \Delta\alpha + y_f \Delta\beta)} d\Delta\alpha d\Delta\beta \\
 &= \frac{1}{C^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} g^*(\xi, \eta) g(f_x + \xi, f_y + \eta) d\xi d\eta \quad (\text{将(A3), (A4) 的结果代入}) \\
 &= \frac{1}{C^2} \lambda_0^4 d_i^4 \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(-\lambda_0 d_i \xi, -\lambda_0 d_i \eta)|^2 |P[-\lambda_0 d_i (f_x + \xi), -\lambda_0 d_i (f_y + \eta)]|^2 d\xi d\eta \\
 &\quad (\text{作变换, 令 } \xi_L = -\lambda_0 d_i \xi, \eta_L = -\lambda_0 d_i \eta) \\
 &= \frac{\lambda_0^2 d_i^2}{C^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 |P(\xi_L - \lambda_0 d_i f_x, \eta_L - \lambda_0 d_i f_y)|^2 d\xi_L d\eta_L \\
 &\quad (\text{将 } f_x = \frac{x_f}{\lambda f}, f_y = \frac{y_f}{\lambda f} \text{ 代入}) \\
 &= \frac{\lambda_0^2 d_i^2}{C^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 \left| P\left(\xi_L - \frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} x_f, \eta_L - \frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} y_f\right) \right|^2 d\xi_L d\eta_L \quad (A5)
 \end{aligned}$$

将(A5), (A2) 代入(A1) 式, 即得

$$\begin{aligned}
 R_{x_f, y_f}(x_f, y_f; x_f - \Delta x_f, y_f - \Delta y_f) &= \frac{1}{\lambda^2 f^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(\alpha', \beta') e^{-i(2\pi/\lambda f)(\alpha' \Delta x_f + \beta' \Delta y_f)} d\alpha' d\beta' \\
 &\quad \cdot \left[\delta\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right) + \frac{\lambda_0^2 d_i^2}{C^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi_L, \eta_L)|^2 \left| P\left(\xi_L - \frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} x_f, \eta_L - \frac{\lambda_0 d_i}{\lambda f} y_f\right) \right|^2 d\xi_L d\eta_L \right]
 \end{aligned}$$

即为文中的(9)式。