

关于全息术一个基本理论问题的研究

郑树梓

(吉林大学物理系, 长春 130023)

王成

(东北师范大学物理系, 长春 130024)

邹振书

(中国科学院长春光机所, 长春 130022)

岳津生

(吉林师范学院物理系, 长春 130032)

About a basic theory problem of holography

ZHENG Shuzi

(Physics Department, Jilin University, Changchun 130023)

ZOU Zhenshu

(Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Changchun 130022)

WANG Cheng

(Physics Department, Northeast Normal University, Changchun 130024)

YUE Jueshen

(Physics Department, Jilin Normal Institute, Changchun 130032)

Abstract Several reconstruction methods of the Fraunhofer hologram in theory has been analyzed. It shows that the Fraunhofer hologram is not equal to the Fourier hologram, and the difference between the two image planes is given. The theory is in good agreement with the experiment. Some conclusions different from some papers are presented.

Key words hologram, reconstruction

1 实验结果

文献[1]认为按图 1(a) 所得的全息图再现光路可以用图 1(b), 或图 1(c) 所示的系统, 其中像面是照明光源 C 的共轭面。文献[2]认为按图 1(d) 记录的是 Fourier 变换全息图, 输出检测面是 Fourier 变换透镜的焦平面。文献[1]还认为用图 1(e) 所记录的 Fraunhofer 全息图, 用与参考波相同的照明光再现时, 可以得到如图 1(f) 所示的结果。

我们按图 2 所示的实验光路拍摄了一张 Fraunhofer 全息图, 当用图 1(b) 所示的光路(挡住图 2 中的参考光束)再现时, 发现像并不在焦平面上, 而在无限远处观察到一个虚像。当用图 1(c) 所示的光路(挡住图 2 中的参考光束, 并将透镜 L' 插入物光束中)再现时, 发现像也不位

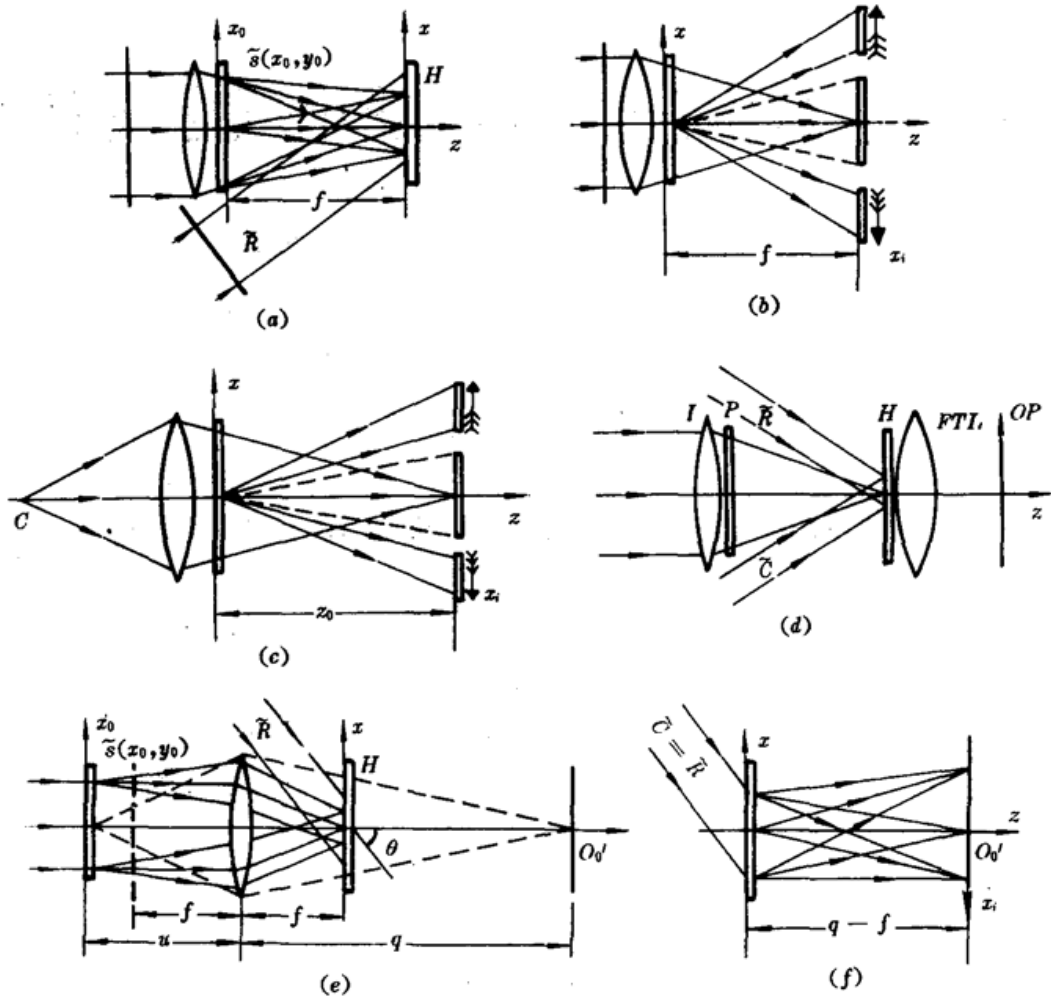


Fig. 1

- (a) The usually recording arrangement of the Fraunhofer hologram. The subject $\tilde{s}(x_0, y_0)$ is on the right surface of the lens;
- (b) The reconstructed arrangement of the Fraunhofer hologram. The reconstructed wave is the plane wave which is on the direction of the axis. The hologram is on the right surface of the lens;
- (c) The reconstructed arrangement of the Fraunhofer hologram. The source of light is on the distance away from the lens;
- (d) The reconstructed wave is the conjugated wave of the reference wave;
- (e) Another recording arrangement of Fraunhofer hologram. u is the subject distance, q is the image distance;
- (f) The reconstructed wave is the same as reference wave

于光源 C 的共轭面上,而在光源 C 所在的平面上观察到一正立的虚像,在透镜的右侧观察到一正立的实像;当光源 C 到透镜的距离 $P \leq f/2$ 时,观察到两个虚像。当用图 1(d) 所示的系统再现时,在距透镜 $f/2$ 处的平面上(而不是在焦平面上)观察到实像。当把由图 1(e)(将图 2 中的物 $\tilde{s}(x_0, y_0)$ 放到透镜 L 的前焦面之外)所记录的全息图按图 1(f) 所示的光路(挡住图 2 中物光束)再现时,我们在全息图右方 $(q-f)$ 处观察到一倒立的实像,在全息图左方 $(q-f)$ 处观察到一倒立的虚像。与图 1(f) 所示的结果也不完全一致。

2 理论分析

2.1 按图 2 所示的坐标系,感光板 H 上的复振幅(略去常量因子)

$$\tilde{t}(x, y) = \exp[ik(x^2 + y^2)/2f] \tilde{S}(x, y) + \exp(-iks\sin\theta x) \tag{1}$$

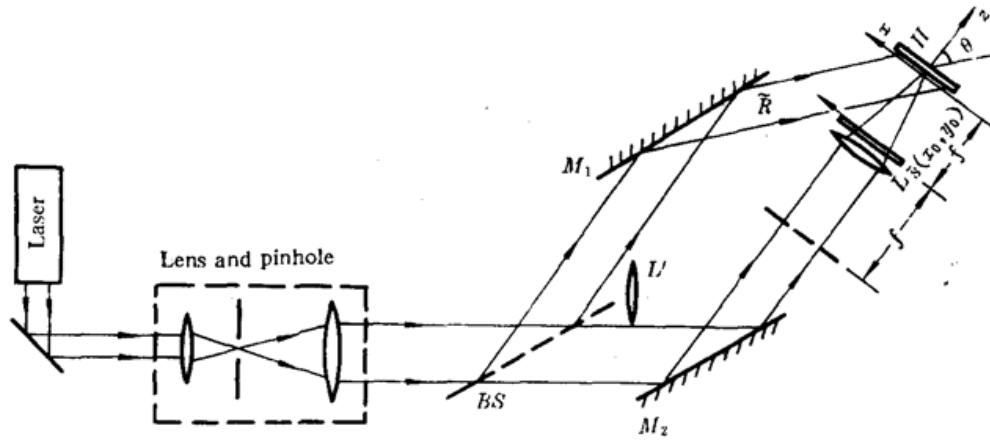


Fig. 2 The recording arrangement of the Fraunhofer hologram. L' is the lens

其中 $k = 2\pi/\lambda$, θ 是参考波传播方向与 z 轴的夹角, $\tilde{S}(x, y)$ 是物函数 $\tilde{s}(x_0, y_0)$ 的 Fourier 变换, 即

$$\tilde{S}(x, y) = \mathcal{F}[\tilde{s}(x_0, y_0)] \quad (2)$$

感光板上的光强

$$I(x, y) = 1 + |\tilde{S}(x, y)|^2 + \exp[ik(x^2 + y^2)/2f]\tilde{S}(x, y)\exp[ik\sin\theta x] + \exp[-ik(x^2 + y^2)/2f]\tilde{S}^*(x, y)\exp(-ik\sin\theta x) \quad (3)$$

设经过线性冲洗的工艺过程得一全息图, 则全息图透过率函数

$$t(x, y) \propto I(x, y) \quad (4)$$

设按图 1(c) 再现, 则入射到透镜左表面上的复振幅(在傍轴近似条件下且略去一常量因子)为

$$\tilde{w}_1(x, y) = \exp[ik(x^2 + y^2)/2p] \quad (5)$$

其中 p 是图 1(c) 中光源 C 的物距, 并假定再现光的波长与参考光的波长一样。透镜右表面处的复振幅为

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2(x, y) &= \tilde{w}_1(x, y)\exp[-ik(x^2 + y^2)/2f] \\ &= \exp[-ik(x^2 + y^2)(f^{-1} - p^{-1})/2] \end{aligned} \quad (6)$$

利用成像公式 $1/p + 1/q = 1/f$, 可知(6)式即表示会聚于光源 C 共轭点处的傍轴球面波。全息图右表面处的复振幅

$$\begin{aligned} \tilde{w}_3(x, y) &= \tilde{w}_2(x, y)t(x, y) \propto [1 + |\tilde{S}(x, y)|^2(\exp[-ik(x^2 + y^2)/2q] \\ &+ \exp[ik(x^2 + y^2)/2p])\tilde{S}(x, y)\exp(ik\sin\theta x) + \exp[-ik(x^2 + y^2)/2d]\tilde{S}^*(x, y)\exp(-ik\sin\theta x) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $d = fp/(2p - f)$ 。

2.1.1 当 $p \rightarrow \infty$, 即用平面波再现(参见图 1(b))时, (7) 式变为

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{3, p \rightarrow \infty} &\propto [1 + |\tilde{S}(x, y)|^2]\exp[-ik(x^2 + y^2)/2f] + \tilde{S}(x, y)\exp[ik\sin\theta x] \\ &+ \exp[-ik(x^2 + y^2)/f]\tilde{S}^*(x, y)\exp(-ik\sin\theta x) \end{aligned} \quad (8)$$

其中第一项(0级波)表示会聚于焦点(光源的共轭点)处的晕轮光; 第二项(+1级波)表示位于无限远处(光源所在平面)一正立的虚像(因为傅氏变换 \tilde{S} 只是物函数 \tilde{s} 的无限远处的复振幅, 所以为正立的虚像), 像的方位角由 $\sin\theta$ 决定(线性相因子 $\exp[ik\sin\theta x]$ 的功能等价于一个光楔: 使光束发生偏折); 第三项(-1级波)表示位于 $f/2$ 处平面上—正立的实像(与 \tilde{S} 共轭的 \tilde{S}^* 表示位于无限远处的倒立的虚像, 经过其功能与焦距为 $(f/2)$ 的透镜相当的相因子 $\exp[-ik(x^2$

+ y^2)/ f)的作用,在($f/2$)处成一正立的实像),像的中心位于($-\sin\theta f/2, 0$),结果如图3所示。可见,与图1(b)中所示的再现结果截然不同

2.1.2 当 $\infty > p > f$ 时,(7)式中第一项表示会聚于共轭点处的晕轮光;第二项表示位于光源C所在平面上的一正立的虚像(相因子 $\exp[ik(x^2 + y^2)/2p]$ 的功能相当于一个焦距为 p 的发散透镜),像的中心位于($-p\sin\theta, 0$)处;第三项表示位于 $z = d$ 处(d 满足 $f/2 < d < f$)平面上的一正立的实像,像的中心位于($-d\sin\theta, 0$)。结果如图4所示。

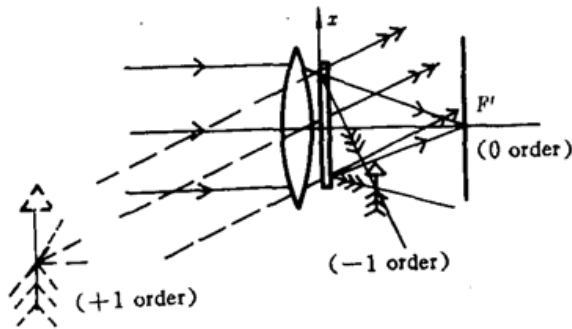


Fig. 3 The reconstructed hologram, when $p \rightarrow \infty$

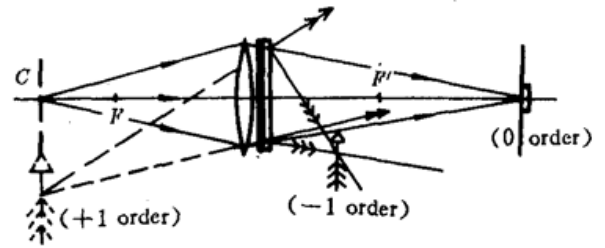


Fig. 4 The reconstructed hologram, when $\infty > p > f$

2.1.3 当 $p = f$ 时,(7)式变为

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{3,p=f} \propto & [1 + |\tilde{S}(x,y)|^2] + \exp[ik(x^2 + y^2)/2f]\tilde{S}(x,y)\exp(iks\sin\theta x) \\ & + \exp[-ik(x^2 + y^2)/2f]\tilde{S}^*(x,y)\exp(-iks\sin\theta x) \end{aligned} \quad (9)$$

第一项表示沿 z 轴传播的非均匀平面波,第二、第三项表示关于全息图为对称的两个像,如图5所示。

2.1.4 当 $f > p > f/2$ 时,(7)式中的 d 满足 $f < d < \infty$,可知再现像如图6所示,零级波变为发散的而非均匀球面波。

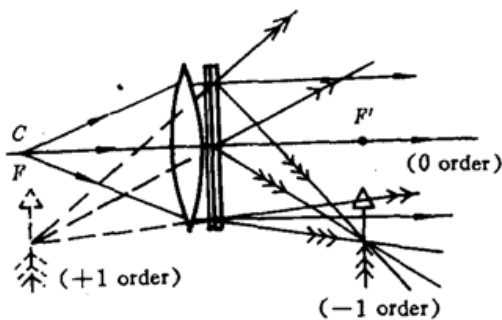


Fig. 5 The reconstructed hologram, when $p = f$,

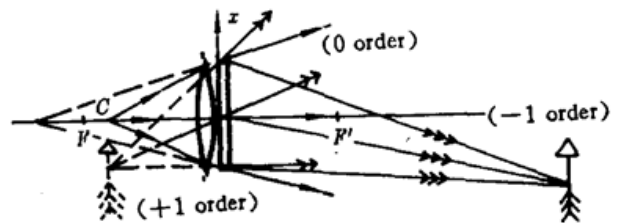


Fig. 6 The reconstructed hologram, when $f > p > f/2$

2.1.5 当 $p = f/2$ 时,由(7)式可知再现像如图7所示,第三项表示倒立的虚像,位于无限远处。

2.1.6 当 $f/2 > p > 0$ 时,由(7)式所得再现像如图8所示,第三项表示有限远处倒立的虚像。

纵观图4~8中的再现像,可知并非如图1(c)所示^[1]。(7)式中第三项所表示的再现像的位置、像的虚实等特征,颇类似于几何光学中透镜成像的情况,这是由于该项中二次相位因子 $\exp[-ik(x^2 + y^2)/2d]$ 的功能相当于透镜,而且等效焦距 $d = fp/(2p - f)$ 的大小,正负是可变的。

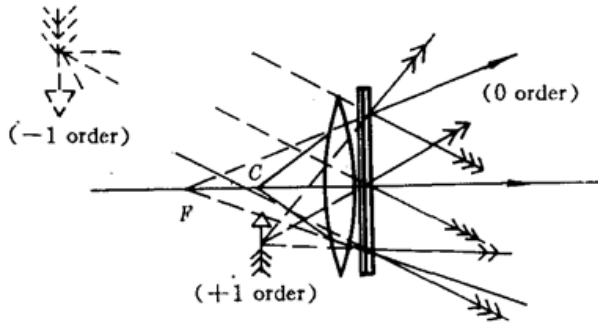


Fig. 7 The reconstructed hologram, when $p = f/2$

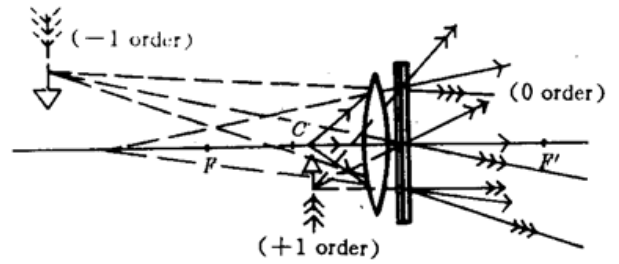


Fig. 8 The reconstructed hologram, $f/2 > p > 0$

2.2 如果按图 1(e) 记录(将图 2 中的物移到透镜 L 的左侧), 则感光板上的复振幅

$$\tilde{U}(x, y) = \exp[ik(f - u)(x^2 + y^2)/2f^2]\tilde{S}(x, y) + \exp[-iks\sin\theta x] \quad (10)$$

其中 u 是物到透镜的距离。感光板上的光强

$$I(x, y) = 1 + |\tilde{S}(x, y)|^2 + \exp[ik(f - u)(x^2 + y^2)/2f^2]\tilde{S}(x, y)\exp(iks\sin\theta x) + \exp[-ik(f - u)(x^2 + y^2)/2f^2]\tilde{S}^*(x, y)\exp(-iks\sin\theta x) \quad (11)$$

经线性冲洗所得全息图的透过率函数

$$t(x, y) \propto I(x, y) \quad (12)$$

设按图 1(f) 再现, 则全息图右表面处的复振幅

$$\tilde{w}(x, y) \propto \tilde{R}(x, y)I(x, y) = [1 + |\tilde{S}(x, y)|^2]\exp(-iks\sin\theta x) + \exp[-ik(x^2 + y^2)/2l]\tilde{S}(x, y) + \exp[ik(x^2 + y^2)/2l]\tilde{S}^*(x, y)\exp[-ik2s\sin\theta x] \quad (13)$$

其中 $l = f^2/(u - f)$ 。利用成像关系式易知 $l = q - f$ 。

2.2.1 当 $u > f$ 时, $l > 0$, (13) 式中第一项表示按再现波方向传播的非均匀平面波; 第二项表示位于 O_0' 点处的倒立的实像; 第三项表示位于 $l = q - f$ 处的倒立的虚像, 如图 9 所示。

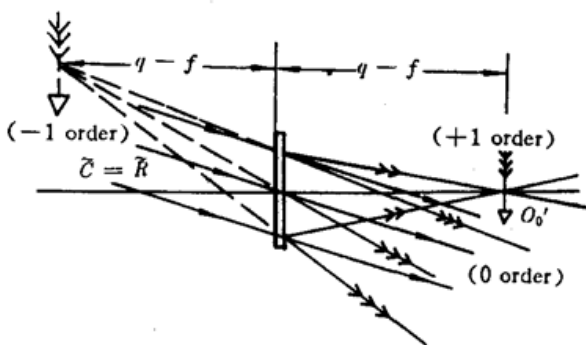


Fig. 9 The recording arrangement is Fig. 5, the reconstructed arrangement is Fig. 6 and $u > f$, where u is the subject distance

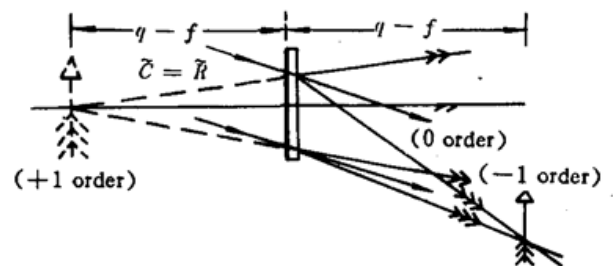


Fig. 10 It is the same as Fig. 14, but $u < f$

2.2.2 当 $u < f$ 时, $l < 0$, (13) 式表示的成像情况如图 10 所示。

2.2.3 当 $u = f$ (即物位于透镜前焦面上) 时, $l \rightarrow \infty$, (13) 式变为

$$\tilde{w}_{p=f} \propto [1 + |\tilde{S}(x, y)|^2]\exp(-iks\sin\theta x) + \tilde{S}(x, y) + \tilde{S}^*(x, y)\exp(-ik2s\sin\theta x) \quad (14)$$

这正是 Fourier 变换全息图的情况, 成像如图 11 所示。

2.2.4 当 $u = f$ 时, 如果用正入射的平面波再现, 则可由 (11) 式得全息图右表面处的复振幅

$$\tilde{w}(x, y) \propto [1 + |\tilde{S}(x, y)|^2] + \tilde{S}(x, y)\exp(iks\sin\theta x) + \tilde{S}^*(x, y)\exp(-iks\sin\theta x) \quad (15)$$

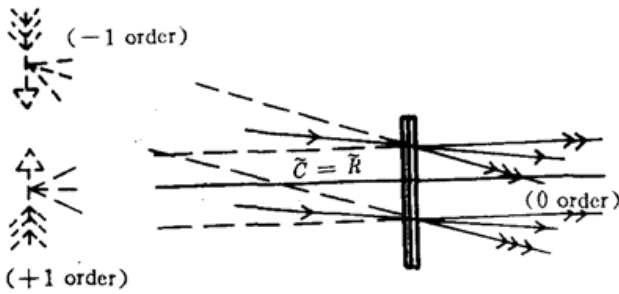


Fig. 11 It is the same as Fig. 11, but $u = f, \bar{c} = \bar{R}$

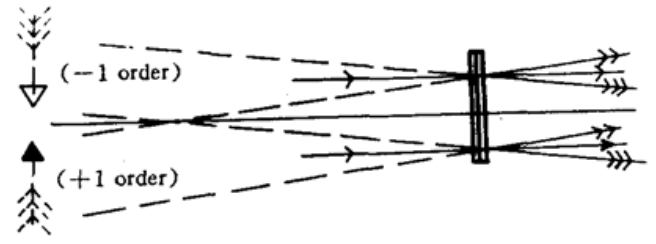


Fig. 12 It is the same as Fig. 14, but $u = f$ and \bar{c} is the plane wave along axis

成像如图 12 所示。如果在全息图右方放一大口径透镜,将三列衍射波会聚后,就在焦平面上形成两个实像和一团扩展的晕轮光,这正是一般文献上所描述的 Fourier 变换全息图的再现像。原始像(对应+1 级波)与共轭像(对应-1 级波)的位置依赖于再现波的方向。

纵观图 9~12 可知再现像也并非如图 1 (f) (晕轮光、原始像和共轭像,三者共居一面)所示^[1]。

2.3 利用(3)式可知图 1 (d) 中全息图右表面处的复振幅

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, y) \propto \tilde{R}^*(x, y)I(x, y) &= [1 + |\tilde{S}(x, y)|^2]\exp(ik\sin\theta x) \\ &+ \exp[ik(x^2 + y^2)/2f]\tilde{S}(x, y)\exp(ik2\sin\theta x) + \exp[-ik(x^2 + y^2)/2f]\tilde{S}^*(x, y) \end{aligned} \quad (16)$$

Fourier 变换透镜右表面处的复振幅

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(x, y) &= \tilde{w}(x, y)\exp[-ik(x^2 + y^2)/2f] \\ &\propto [1 + |\tilde{S}(x, y)|^2]\exp[-ik(x^2 + y^2)/2f]\exp(ik\sin\theta x) \\ &+ \tilde{S}(x, y)\exp(ik2\sin\theta x) + \exp[-ik(x^2 + y^2)/f]\tilde{S}^*(x, y) \end{aligned} \quad (17)$$

上式中第一项表示会聚于焦平面上的晕轮光;第二项表示位于无限远的正立虚像;第三项表示位于 (f/2) 处平面上正立实像。像面不在图 1 (d) 中 Fourier 变换透镜的焦平面上。

3 Fourier 变换全息图与 Fraunhofer 全息图的像面

文献[1]与文献[2]认为像面位于照明光源的共轭面上,其根源是认为 Fourier 变换全息图的像面也是 Fraunhofer 全息图再现像的像面。事实上并非如此。Fraunhofer 全息图与 Fourier 变换全息图是两种不同类型的全息图。由前面的叙述可知,若按图 13(a)再现 Fourier 变换全息图时,其再现像面位于透镜的焦平面上;若按相同条件再现 Fraunhofer 全息图时,实验中观察到再现像面位于 2f 处,并不在焦平面上。理论分析如下:

设图 13 (b) 中再现波 $\tilde{C}(x, y) = 1$, 则全息图右表面处的复振幅

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(x, y) \propto 1 + |\tilde{S}(x, y)|^2 + \exp[ik(x^2 + y^2)/2f]\tilde{S}(x, y)\exp(ik\sin\theta x) \\ + \exp[-ik(x^2 + y^2)/2f]\tilde{S}^*(x, y)\exp(-ik\sin\theta x) \end{aligned} \quad (18)$$

焦平面上的复振幅

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2(x_i, y_i) &= \mathcal{F}^{-1}[\tilde{w}_1(x, y)] \propto \delta(x_i, y_i) + \tilde{s}(x_i, y_i) \star \tilde{s}(x_i, y_i) \\ &+ \exp[-ik(x_i^2 + y_i^2)/2f] * \tilde{s}(x_i + f\sin\theta, y_i) \\ &+ \exp[ik(x_i^2 + y_i^2)/2f] * \tilde{s}^*[-(x_i - f\sin\theta), -y_i] \end{aligned} \quad (19)$$

2f 处平面上的复振幅

$$\begin{aligned} \tilde{w}_3(x'_i, y'_i) &= \tilde{w}_2(x_i, y_i) \text{ 的 Fresnel 变换} \\ &= \exp[ik(x_i'^2 + y_i'^2)/2f]\mathcal{F}\{\tilde{w}_2(x_i, y_i)\exp[ik(x_i^2 + y_i^2)/2f]\} \end{aligned}$$

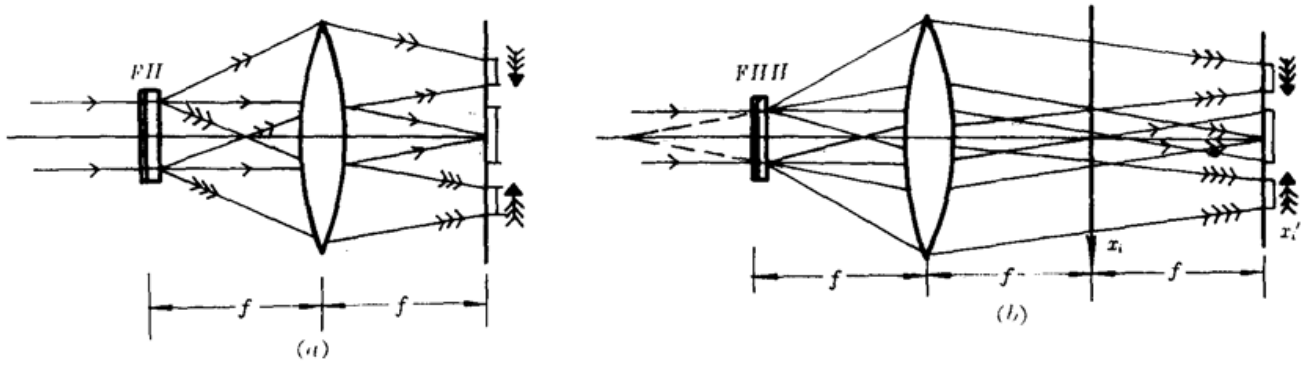


Fig. 13

(a) The Fourier hologram, the imaging plane is on the focal plane;

(b) The Fraunhofer hologram, the imaging plane is on the $2f$ plane

$$\begin{aligned}
 &= \exp[ik(x_i'^2 + y_i'^2)/2f] \cdot \{1 + |\tilde{S}(x', y')|^2 + \exp[ik(x_i'^2 + y_i'^2)/2f] \tilde{S}(x', y') \\
 &\quad \cdot \exp(ikx_i' \sin\theta) + \exp[-ik(x_i'^2 + y_i'^2)/2f] \tilde{S}^*(x', y') \\
 &\quad \cdot \exp(-ikx_i' \sin\theta)\} * \exp[-ik(x_i'^2 + y_i'^2)/2f] \quad (20)
 \end{aligned}$$

经计算可得

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}_3(x', y') &= \exp[ik(x_i'^2 + y_i'^2)/2f] \\
 &\quad + \tilde{s}(x', y') \star \tilde{s}(x', y') * \exp[ik(x_i'^2 + y_i'^2)/2f] \\
 &\quad + \tilde{s}(x' + f \sin\theta, y') + \tilde{s}^*[-(x' - f \sin\theta), -y'] \quad (21)
 \end{aligned}$$

上式中第一项代表一傍轴的发散球面波,产生一均匀亮背景;第二项表示一扩展的亮斑;第三项表示相对物体为倒立的实像;第四项表示相对物体为正立的实像,成像如图 13(b) 所示。

若用共轭参考波再现 Fourier 变换全息图,则由(15)式可知共轭的倒立虚像位于无限远处平面上;而相同的再现条件, Fraunhofer 全息图重构的共轭正立实像,由(16)式第三项可知位于焦平面上。

本文从图 3~13 所表示的再现结果,均在中国科学院长春光机所逐一地得到实验上的验证。该所卢振武同志也参加了实验工作,而且与我们做过有益的讨论,使我们收益非浅,在此深表谢意。

参 考 文 献

- 1 于美文 *et al.*, 光学全息及信息处理, 国防工业出版社, 北京, 1984, 59~60
- 2 辻内顺平, 村田和美等编, 谈恒英译, 光学信息处理, 机械工业出版社, 北京, 1985, 374~375

(收稿日期:1990年5月23日;收到修改稿日期:1992年7月14日)