第20卷 第6期 中国激光 Vol. A20, No. 6
1993年6月 CHINESE JOURNAL OF LASERS June, 1993

分析任意光脉冲传输的矩阵方法*

林国成** 林 强 王绍民
(杭州大学物理系，杭州 310028)

提要 本文用矩阵分析方法讨论了任意时间场分布的光脉冲在一般色散介质中的传输，引入了光脉冲质量因子 M_t^2 和一般化的脉冲复参数 P^{-1}，得到了具有任意形状和任意啁啾的光脉冲在色散光学系统中传输的 $ABCD$ 定律。

关键词 任意光脉冲传输，光脉冲质量因子，时域 $ABCD$ 定律

Propagation of arbitrary optical pulses analysed by matrix method

LIN Guocheng, *LIN Qiang*, *WANG Shaomin*
(Department of Physics, Hangzhou University, Hangzhou 310028)

Abstract The propagation of arbitrary temporal amplitude profile optical pulses through it dispersive media is discussed by using matrix method. A pulse quality factor M_t^2 and a generalized complex pulse parameter P^{-1} is introduced. The generalized $ABCD$ law for arbitrary pulses with any amplitude shape and any chirp through dispersive systems is derived.

Key words arbitrary pulse propagation, pulse quality factor, temporal $ABCD$ law

1 引 言

用矩阵方法来分析光脉冲经过色散光学系统的传输和变换是一条有效的途径。S. P. Dijaili[1] 等利用时域平面波脉冲传输和空域单色光传输的相似性提出了 2×2 阶时域 $ABCD$ 矩阵分析方法，范滇元[2]等进一步推广了这种方法，给出了矩阵元表示的时间菲涅耳数和时域衍射积分公式。这种方法能有效地用来处理具有高斯型时间场分布的光脉冲经过色散系统时的传输和变换。但是在实际问题中光脉冲的振幅随时间往往不是呈高斯分布，如单模光纤中传输的光脉冲一般呈双曲正割型函数分布，因此其场分布的特性不能用高斯型脉冲的复参数 p^{-1} 表征，其传输规律也不尽相同。

本文首先引入了任意光脉冲在时域内的二阶动量，定义了表征光脉冲质量的因子 M_t^2，运用时域衍射积分公式推出了二阶动量经过线性色散光学系统的变换规律，进一步定义了能等效地表征任意光脉冲场分布特性的脉冲复参数 P^{-1}，并且得到了其传输的一般化 $ABCD$ 定律。作为一个应用实例，分析了具有双曲正割型场分布的光脉冲的传输特性。

收稿日期：1992年6月18日；收到修改稿日期：1992年10月9日。
* 浙江省自然科学基金资助项目；** 现在浙江工学院基础部工作。

2　任意光脉冲的二阶动量

对一个任意的光脉冲，如果其时域和频域的场分布函数分别为 $A(\tau)$ 和 $B(\omega)$，那么类似于任意空间场分布的光束的二阶动量定义[3]，我们把光脉冲的二阶动量定义为

$$\mu_\tau^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(\tau-\bar{\tau})^2|A(\tau)|^2d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}(\tau-\bar{\tau})^2I(\tau)d\tau \tag{1}$$

$$\mu_\omega^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega-\bar{\omega})^2|B(\omega)|^2d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega-\bar{\omega})^2I(\omega)d\omega \tag{2}$$

其中

$$\bar{\tau}=\int_{-\infty}^{+\infty}\tau|A(\tau)|^2d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\tau I(\tau)d\tau$$

$$\bar{\omega}=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega|B(\omega)|^2d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega I(\omega)d\omega$$

为光脉冲的一阶动量。μ_τ 和 μ_ω 分别表示了光脉冲的时域分布函数和频域分布函数的有效半宽度，反映了光脉冲的脉宽和带宽。

现考虑一个具有线性啁啾的高斯型光脉冲，其复振幅为[1]

$$A(\tau)=A_0e^{-[\tau^2/2\sigma^2(z)]}\cdot e^{i(s/2)\tau^2} \tag{3}$$

光强分布为

$$I(\tau)\propto e^{-[\tau^2/\sigma^2(z)]}$$

当它在自由色散介质中传输时其脉冲宽度参量 $\sigma(z)$ 随传输距离 z 的变化关系有[2]

$$\sigma^2(z)=\sigma_0^2+\frac{\beta''(z-z_0)}{\sigma_0^2} \tag{4}$$

σ_0 为光脉冲啁啾为零时的脉冲宽度参量。

利用公式(1)，(2)，(3) 和(4) 经过运算可得到高斯型光脉冲的二阶动量

$$\mu_\tau^2(z)=[\sigma(z)/\sqrt{2}]^2\quad 和\quad \mu_\omega^2=(1/\sqrt{2}\sigma_0)^2$$

在 $z=0$ 处，有

$$\mu_{\tau_0}\cdot\mu_\omega=1/2 \tag{5}$$

上式即为高斯型光脉冲的“时间—带宽积”。对一个任意的光脉冲，其“时间—带宽积”要大于1/2，即

$$\mu_{\tau_0}\cdot\mu_\omega=(1/2)\times M_\tau^2 \tag{6}$$

其中 $M_\tau^2>1$，将它称为“脉冲质量因子”，其定义为

$$M_\tau^2=\frac{[实际光脉冲的“时间—带宽积”]}{[高斯光脉冲的“时间—带宽积”]}$$

高斯型光脉冲的质量因子 $M_\tau^2=1$，而其它任意光脉冲的 $M_\tau^2>1$。M_τ^2 在表征光脉冲质量及其传输性质中是一个十分有用的量。

3　任意场分布光脉冲传输的 $ABCD$ 定律

具有理想的高斯型分布的光脉冲的脉冲复参数定义为[1]

$$\frac{1}{p}=\frac{s}{\omega_0}+\frac{i}{\omega_0\sigma^2} \tag{7}$$

其中 s 为光脉冲所具有的啁啾，光脉冲强度下降到一半时的全宽度(FWHM)$\Delta t = 2\sqrt{\ln 2}\sigma_0$，脉冲复参数 p^{-1} 确定了高斯型光脉冲场分布的振幅和位相分布，它经过线性光学系统传输时满足时域 $ABCD$ 定律。

$$p_2^{-1} = (C + Dp_1^{-1})(A + Bp_1^{-1})^{-1} \tag{8}$$

对于一个实际的光脉冲，由于场分布通常是非高斯的，不能再由脉冲复参数 P 来表示。但在大部分情况下，并不要求给出光脉冲具体的场分布，而只需要一些特征量(如脉宽)的值。由于光脉冲场分布函数的二阶动量可有效地描述光脉冲的特征量，所以定义任意光脉冲的等效脉宽 W 满足下式：

$$W^2 = 4\mu_\tau^2 = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 |A(\tau)|^2 d\tau \tag{9}$$

其中的复振幅一般地可写成振幅和位相的函数：

$$A(\tau) = \psi(\tau)\exp[j\omega_0\Phi(\tau)] \tag{10}$$

$A(\tau)$ 经过线性色散光学系统传输时满足时域衍射积分公式：

$$A_2(\tau_2) = \left(\frac{\nu_0 j}{B}\right)^{1/2}\exp(-j\omega_0 L_0)\int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\tau_1)\exp\left[\frac{j\omega_0}{2B}(A\tau_1^2 - 2\tau_1\tau_2 + D\tau_2^2)\right]d\tau_1 \tag{11}$$

$\nu_0 = \omega_0/2\pi$，L_0 为中心频率处的光波从入射面到出射面的时间程函。把(9)代入(10)，可得到光脉冲的等效脉宽经过色散光学系统的传输规律：

$$W_2^2 = A^2W_1^2 + 2ABV_1 + B^2U_1 \tag{12}$$

其中

$$U = \left(\frac{1}{\pi\nu_0}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau}\right|^2 d\tau \tag{13}$$

由于 $A(\tau)$ 和 $B(\omega)$ 满足傅里叶变换关系[4]，即有

$$A(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega)\exp(i\omega\tau)d\omega$$

所以(13)式又可以写为

$$U = \frac{1}{8\pi^5\nu_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|B(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{8\pi^5\nu_0^2}\mu_\omega^2 \tag{14}$$

可见 U 是由光脉冲频域分布函数的二阶动量所确定的物理量。

$$V = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \tau\left[\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial\tau}\right]\psi^2(\tau)d\tau \tag{15}$$

它是与任意光脉冲的等效啁啾有关的量。

参量 U 和 V 经过色散光学系统的传输规律同样可以借助时域衍射积分公式求得

$$U_2 = C^2W_1^2 + 2DCV_1 + D^2U_1 \tag{16}$$

$$V_2 = ACW_1^2 + (AD + BC)V_1 + BDU_1 \tag{17}$$

并且可以证明 W,U 和 V 之间存在以下不变式：

$$W_2^2U_2 - V_2^2 = W_1^2U_1 - V_1^2 = \left(\frac{1}{\pi\nu_0}M_\tau^2\right)^2 \tag{18}$$

M_τ^2 即为光脉冲的脉冲质量因子，对于场分布一定的光脉冲，其传输过程中 M_τ^2 为不变量，这样以上方程组可以用一个复数方程来加以表示：

$$P_2 = \frac{AP_1 + B}{CP_1 + D} \tag{19}$$

其中

$$P^{-1} = \frac{V}{W^2} - \frac{jM_\tau^2}{\pi\nu_0 W^2} \tag{20}$$

称为任意光脉冲的等效脉冲复参数，式(19) 即为任意光脉冲传输的一般化时域 $ABCD$ 定律，事实上在空域中非高斯光束的传输也有类似的规律[5]。对照式(7) 和(20)，任意光脉冲的等效啁啾定义为

$$S = \omega_0 \frac{V}{W^2}$$

因此，对一个任意的光脉冲，只要知道初始的场分布，先按(9)，(13)，(15) 式求得 W_1^2, U_1, V_1，再按(18)，(20) 式求得 M_τ^2 和 P_1^{-1}，那么它经过任意色散光学系统的传输可用(19) 式解决，从而避免了冗繁的时域衍射积分的计算。

4 单模光纤中 sech² 型光脉冲的传输和光孤子的形成

众所周知，在单模光纤中传输的光脉冲其光强一般呈 sech² 型分布，即

$$I_s(\tau) = c \cdot \mathrm{sech}^2[\tau/\sigma(z)] \tag{21}$$

光强下降到最大值一半时的全宽度为 $\Delta t = 1.76\sigma(z)$，脉冲光场分布的复振幅可表示成

$$A_s(\tau) = A_0 \mathrm{sech}^2[\tau/\sigma(z)] \cdot e^{js\tau^2} \tag{22}$$

这里为了运算方便认为光脉冲在光纤中传输时的啁啾是线性的，对非线性啁啾情况也可以作类似的处理。

运用前一节的处理方法，sech² 型光强分布光脉冲的等效宽度可由下式给出

$$W_s^2 = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 |A_s(\tau)|^2 d\tau = 4A_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 \mathrm{sech}^2[\tau/\sigma(z)] d\tau = (\pi^2/3)\sigma^2(z) \tag{23}$$

运算过程中用到归一化条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_0^2 \mathrm{sech}^2[\tau/\sigma(z)] = 1$$

光脉冲的另二个特征参量为

$$\begin{aligned} U_s &= \left(\frac{1}{\pi v_0}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial A_s(\tau)}{\partial \tau}\right|^2 d\tau = \left(\frac{1}{\pi v_0}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} A_0^2 \left\{\frac{1}{\sigma(z)} \frac{\sinh^2[\tau/\sigma(z)]}{\cosh^4[\tau/\sigma(z)]} + s^2\tau^2 \mathrm{sech}^2[\tau/\sigma(z)]\right\} d\tau \\ &= \left(\frac{1}{\pi v_0}\right)^2 \left(\frac{1}{3\sigma^2(z)} + \frac{\pi^2 s^2 \sigma^2(z)}{12}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

$$V_s = 4\int_{-\infty}^{+\infty} A_0^2 \frac{s\tau^2}{\omega_0} \mathrm{sech}^2[\tau/\sigma(z)] d\tau = \frac{\pi^2 s \sigma^2(z)}{3\omega_0}$$

sech² 型光强分布脉冲的“脉冲质量因子”为

$$M_{\tau_s}^4 = (\pi v_0)^2 (W_s^2 U_s - V_s^2) = \pi^2/9 \tag{25}$$

因此，其等效脉冲复参数可写成

$$\frac{1}{P} = \frac{V_s}{W_s} + \frac{jM_{\tau_s}^2}{\pi v_0 W_s^2} = \frac{S}{\omega_0} + \frac{2i}{\pi\omega_0\sigma^2(z)} \tag{26}$$

P^{-1} 经过光学系统的变换应满足(19) 式。

当光脉冲在单模光纤中传输时将受到光纤的群色散和非线性效应的共同作用。其时域 2 × 2 阶矩阵为[1]

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + s\beta''z & \omega_0\beta''z \\ s/\omega_0 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

设入射光脉冲的啁啾为零，其等效脉冲复参数为

$$p^{-1} = \frac{2i}{\pi\omega_0\sigma_0^2}$$

运用 $ABCD$ 定律求得出射脉冲的等效啁啾和脉宽分别为

$$S_f = \frac{4(\beta''z) + \pi^2\sigma_0^2 s(1 + s\beta''z)}{4(\beta''z)^2 + \pi^2\sigma_0^4(1 + s\beta''z)} \tag{28}$$

$$\sigma_f = W_0\sqrt{(1 + s\beta''z)^2 + \left(\frac{2\beta''z}{\pi\sigma_0^2}\right)^2} \tag{29}$$

从以上两式可以看出：只有当啁啾 S 和群色散 $\beta''z$ 异号时，才有可能产生光脉冲的压缩，并且当 $S_f = 0$，即

$$\beta''z = -\frac{9\sigma_0^4 s^2}{4 + \pi^2\sigma_0^4 s^2}\cdot\frac{1}{s} \tag{30}$$

时，等效脉冲宽度 W_f 达到最小值：

$$W_{f\min} = \frac{\sqrt{16 + 4\pi_0^4 S^2}}{4 + \pi^2\sigma_0^4 S^2} \tag{31}$$

如果(29)式中平方根值为1，也即当

$$s = -\frac{1}{\beta''z}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\beta''z}{\pi\sigma_0^2}\right)^2}\right)$$

时，$W_f = W_0$，这时光脉冲的脉宽在光纤中传输时保持不变，这也就是光纤中形成光孤子的条件。

感谢张在宣教授、陈钰清教授有价值的讨论。感谢本文审阅者提出的宝贵意见。

参 考 文 献

1 S. P. Dijaili *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-26**, 1158(1990)
2 张筑虹，范滇元，光学学报，**11**(11)，1011(1991)
3 M. J. Bastiaans, *Optik*, **4**, 173(1989)
4 A. Penzkofeer, *Optical and Quantum Electronics*, **23**, 685(1991)
5 P. A. Belanger, *Opt. Lett.*, **16**, 196(1991)